

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Ответственный редактор
акад. А. С. Алексеев



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1986

Исследования по прикладной теории графов.— Новосибирск: Наука, 1986.

В сборник вошли статьи, написанные по материалам II и III Всесоюзных совещаний «Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях». Рассматриваются вопросы, имеющие существенное прикладное значение. Отражены последние достижения по использованию теорий графов, гиперсетей и матроидов в информатике, программировании, технике электросвязи и др. В первой части анализируются модели и методы изучения систем сетевой структуры. Вторая посвящена применению теории групп при исследовании графов. Третья содержит работы по упаковкам и покрытиям в матроидах и сетях.

Книга предназначена научным работникам, исследующим структуры сложных систем, и может быть полезна аспирантам и студентам соответствующей специальности.

Рецензенты *В. Т. Дементьев, М. И. Нечепуренко,
А. И. Сердюков*

**ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ
К ЗАДАЧАМ ЛОГИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ
ДИСКРЕТНЫХ УСТРОЙСТВ**

**А. Д. ЗАКРЕВСКИЙ, Ю. В. ПОТТОСИН,
А. А. ШНЕЙДЕР**

Язык теории графов и сетей удобен для описания как структуры дискретных устройств, так и их функций. Проектирование дискретного устройства начинается с разработки алгоритма его поведения, верификации этого алгоритма, его оптимизации и, возможно, декомпозиции на блоки. Эти задачи существенно усложняются при переходе к параллельным алгоритмам. При их рассмотрении оказывается полезным аппарат сетей Петри [1]. Так, контроль корректности параллельных алгоритмов сводится к проверке «живости» и безопасности соответствующих сетей Петри, для чего были разработаны алгоритмы редукции последних [2, 3].

Следом за алгоритмическим идет этап логического проектирования, заключающийся в поиске по возможности простейшей логической структуры, реализующей заданное поведение. Логическое проектирование распадается на массу логико-комбинаторных задач, значительную долю которых также можно свести к сравнительно небольшому числу оптимизационных задач на графах, что позволяет прояснить их математическую сущность и сосредоточить усилия на разработке эффективных методов решения. При этом приходится ориентироваться на ЭВМ, поскольку трудоемкость таких задач слишком велика, чтобы можно было надеяться на успешное решение их вручную.

Прогресс микроэлектроники привел к заметному слиянию этапа логического проектирования с традиционно следующим за ним этапом технического проектирования, где решаются, например, задачи компоновки (разрезания логической схемы на куски, реализуемые на отдельных конструктивных единицах) и размещения (геометрического размещения элементов схемы в пространстве конструктивной единицы). Как известно, они сводятся к теоретико-графовым задачам установления изоморфизма графов, их разрезания на слабо связанные между собой компоненты, разбиения на плоские подграфы и т. д. [4].

Аналогичные задачи решаются и при программной реализации алгоритмов. Например, к своеобразному разрезанию графа сводится метод повышения быстродействия программы, реализуемой на ЭВМ с небольшим числом «быстрых» регистров [5].

Многие вопросы логического проектирования сводятся к задаче о минимальной раскраске вершин графа и ее модификациям. Обычно они формулируются как задачи о разбиении данного множества на минимальное число совместимых в том или ином смысле подмножеств. Задачи, где условие попарной совместимости элементов подмножества необходимо и достаточно для их совместимости в совокупности, сводятся к нахождению минимальной раскраски графа, вершины которого соответствуют элементам данного множества, а ребра — парам несовместимых элементов этого множества. Задача раскраски вершин графа возникает при декомпозиции булевых функций [6]; микропрограммных автоматов [7] и сетей Петри [8]; ортогонализации системы частичных булевых функций [9] и построении минимальной по мощности системы частичных булевых функций, реализующих заданную [10]; кодировании входных состояний асинхронного автомата [11] и микроопераций [12]; построении кода, обнаруживающего ошибки [13]; диагностике неисправностей [14]; аппаратном контроле цифровых автоматов [15]; объединении структурных схем операционных автоматов [16] и т. д.

Обзор литературы показывает, что все известные точные алгоритмы раскраски чрезвычайно трудоемки и позволяют раскрашивать лишь графы с числом вершин в пределах сотни, что явно недостаточно для решения реальных задач логического проектирования дискретных устройств. Трудности, препятствующие существенному повышению размерности точно решаемых задач, носят принципиальный характер: задача раскраски вершин графа является *NP*-трудной. Поэтому для решения практических задач обычно приходится использовать приближенные алгоритмы раскраски. В работе [17] приведены результаты исследования известных и предлагаемых приближенных алгоритмов раскраски, позволившие выявить наиболее эффективные алгоритмы и области их предпочтительного использования.

Задачи логического проектирования, сводимые к раскраске вершин графа, образуют подкласс значительно более широкого и значительно менее изученного класса задач о минимальном разбиении данного множества, в которых условие попарной совместимости элементов подмножества необходимо, но не обязательно достаточно для их совместимости в совокупности.

Далее приведена предложенная в работах [10, 18] постановка обобщенной задачи о разбиении данного множества на минимальное число совместимых подмножеств, называемой для краткости *P*-задачей и являющейся удобной формальной моделью для задач такого типа, возникающих в логическом проектировании дискретных устройств. В этой постановке используются понятия квазиупорядоченного множества и его совместимого подмножества. Напомним, что множество M называется квазиупорядоченным, если на нем определено транзитивное и рефлексивное бинарное отношение $>$. Подмножество S квазиупорядоченного множества M называется совместимым, если существует элемент $x \in M$,

находящийся в отношении $x > y$ с каждым элементом $y \in S$. Р-задача формулируется как задача о разбиении данного подмножества конечного квазиупорядоченного множества на минимальное число совместимых блоков. Очевидно, что она может быть рассмотрена как оптимизационная задача на ориентированном графе (диаграмме Хассе), вершины которого соответствуют элементам множества M , а дуга, идущая от i -й к j -й вершине, означает, что элементы x_i и x_j множества M находятся в отношении $x_i > x_j$.

Р-задача, будучи обобщением классической задачи раскраски вершин графа, в свою очередь является частным случаем задачи об оптимальном разбиении множества, рассмотренной в работе [19], а также близкой к ней задачи об оптимальном покрытии множества [20]. Качество полученного решения в них определяется значением функционала, сопоставляющего каждому разбиению множества на совместимые подмножества (или покрытию множества совместимыми подмножествами) некоторое неотрицательное число. Тем не менее самостоятельное рассмотрение поставленной задачи представляет несомненный интерес, поскольку она имеет большое число полезных приложений и для ее решения могут быть предложены быстрые и достаточно эффективные эвристические процедуры [10, 18], являющиеся аналогами наиболее хорошо зарекомендовавших себя приближенных алгоритмов раскраски [17]. Для точного решения Р-задачи можно использовать подходы, описанные в работах [10, 19, 20], однако область их применения невелика.

К числу наиболее известных интерпретаций Р-задачи относятся ставшие классическими задачи о минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) и о минимизации длины кода внутренних состояний асинхронного автомата. Особенно много интерпретаций Р-задачи возникает при проектировании сетей и программируемых логических матриц (ПЛМ), сводящемся по существу к решению задач типа декомпозиции «больших» систем ДНФ на «малые» [21]. Проведенный в [10] анализ рассматриваемых в работе [21] оптимизационных задач проектирования дискретных устройств в базисе ПЛМ показал, что кроме упомянутых выше задач минимизации ДНФ булевых функций и минимизации длины кода внутренних состояний асинхронного автомата интерпретациями Р-задачи являются также разнообразные оптимизационные задачи, возникающие при синтезе одноярусных сетей из ПЛМ, минимизации секвенциальных автоматов, нахождении минимального дизъюнктивного базиса для заданного множества булевых векторов, построении проверяющего теста для транзисторной матрицы, реализующей систему элементарных конъюнкций, а также при построении диагностического теста для дизъюнктивной матричной схемы, если в ней возможны любые кратные неисправности типа исчезновения транзисторов. Задачи синтеза контролепригодных ПЛМ, рассматриваемые в [22, 23], а также большинство оптимизацион-

ных задач логического проектирования, исследуемых в работах [20, 24, 25],— это интерпретации Р-задачи. Анализ работ [11, 21—25] показывает, что можно разработать достаточно развитую систему логического проектирования дискретных устройств в базисе ПЛМ (включающую как их синтез, так и диагностику неисправностей), согласно которой процесс проектирования рассматривается как совокупность этапов, каждый из которых заключается в решении некоторой оптимизационной задачи, являющейся интерпретацией обобщенной задачи о минимальном разбиении множества.

Там, где задача раскраски усложнена дополнительными условиями одноцветности вершин, эффективным может оказаться и подход, предполагающий нахождение наибольшего пустого или полного подграфа, а затем группирование около вершин, вошедших в этот подграф, остальных вершин заданного графа. С помощью этого подхода, как показано в [26], можно решить такие задачи, как минимизация длины кода состояний асинхронного автомата, сжатие таблицы переходов автомата (по строкам и столбцам), параллельная декомпозиция автомата, упрощение системы булевых функций, описывающих асинхронный автомат. Точно так же можно решать и все остальные задачи, перечисленные выше. Из рассмотренных здесь подходов к решению задач логического проектирования данный подход единственно пригоден для решения таких задач абстрактного синтеза автоматов, как минимизация числа состояний синхронного автомата и его декомпозиция. В этих задачах искомая совокупность совместимых подмножеств должна обладать свойством замкнутости, которое заключается в том, что наличие каких-либо элементов в одном совместимом подмножестве требует их включения в другое совместимое подмножество из получаемой совокупности [27].

В ряде случаев порядок выделенного подграфа (пустого или полного), являющегося некоторым промежуточным результатом решения любой из названных задач, может служить оценкой сложности ожидаемого результата. По величине оценки можно судить о целесообразности получения окончательного решения соответствующей оптимизационной задачи, что важно при диалоговом режиме выполнения алгоритма. Например, в случае параллельной декомпозиции автомата, которая применяется с целью сокращения размерности задач синтеза, порядок наибольшего пустого подграфа есть оценка числа состояний наиболее сложной компоненты в получаемой сети автоматов. Если эта величина незначительно отличается от числа состояний заданного автомата, то нет смысла решать задачу параллельной декомпозиции, так как указанная цель не будет достигнута.

В работах [28, 29] описаны оригинальные алгоритмы поиска максимальных пустых и полных подграфов. Некоторые из алгоритмов имеют приближенный характер. В отдельных случаях делается попытка оценить близость полученного подграфа к наи-

большему, для чего подсчитывается число шагов алгоритма, при выполнении которых не теряется оптимальное решение [30]. При кодировании внутренних состояний автомата, выполняемом совместно с минимизацией числа состояний [31], возникает задача максимального расширения двудольного подграфа в заданном графе, что соответствует разделению максимального числа пар состояний автомата одной кодирующей переменной. В работе [32] предложен эвристический алгоритм для решения этой задачи.

Описанные в работах [10, 18, 26] методы и алгоритмы реализованы на языке ЛЯПАС-М [33], отличающемся высокой эффективностью при работе с булевыми векторами (графы задавались матрицами смежности их вершин). Разработанные программы включены в пакеты прикладных программ [34, 35] и хорошо зарекомендовали себя как в ходе испытаний на потоках псевдослучайных задач [17, 36, 37], так и в практике логического проектирования дискретных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Котов В. Е. Сети Петри.— М.: Наука, 1984.— 160 с.
2. Анишев П. А. Редуцируемость сетей Петри.— Программирование, 1982, № 4, с. 36—43.
3. Закревский А. Д. Редукционный метод проверки корректности параллельных алгоритмов логического управления.— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 7, с. 617—619.
4. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Курейчик В. М. Применение графов для проектирования дискретных устройств.— М.: Наука, 1974.
5. Закревский А. Д., Поляков А. С. Методы оптимизации динамического использования регистров.— Докл. АН БССР, 1976, т. 20, № 6, с. 506—508.
6. Бибило П. Н. Декомпозиция булевых функций (обзор).— В кн.: Проектирование устройств логического управления. М.: Наука, 1984, с. 106—126.
7. Баранов С. И., Янцен Н. Я. Квазипараллельная декомпозиция микропрограммных автоматов.— Автоматика и вычисл. техника, 1980, № 5, с. 8—13.
8. Кёниг Р., Фрицлович Г. Ф. Декомпозиция сети Петри при построении дискретных устройств на основе стандартных модулей.— Автоматика и вычисл. техника, 1984, № 1, с. 82—91.
9. Ётосин Ю. В. Ортогонализация системы не полностью определенных булевых функций.— В кн.: Вопросы синтеза логики ЦВМ. Каунас: Каунас. политехн. ин-т, 1976, ч. III, с. 39—42.
10. Шнейдер А. А. Обобщения задачи раскраски вершин графа применительно к проектированию дискретных устройств.— В кн.: Теория и методы автоматизации проектирования. Минск: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1983, вып. 2, с. 76—82.
11. Калиберзинь А. Я., Чапенко В. П. Способ кодирования входных состояний дискретных устройств при реализации на ПЛИМ.— Автоматика и вычисл. техника, 1983, № 1, с. 41—47.
12. Майоров С. А., Новиков Г. И. Принципы организации цифровых машин.— Л.: Машиностроение, 1974.
13. Akers S. B. Fault diagnosis as a graph colouring problem.— IEEE Trans. Comput., 1974, C-23, № 7, p. 706—713.
14. Carvajal R. Modulus k-check digits and the chromatic number problem.— In: Proc. 6th IFIP-Congress, Stockholm, 1974, p. 521—526.
15. Щербаков Н. С., Подкопаев Б. П. Структурная теория аппаратного контроля цифровых автоматов.— М.: Машиностроение, 1982.

16. Зиямин В. Ф. Сведение задачи объединения структурных схем операционных автоматов к задаче раскраски графов.— В кн.: Теория конечных автоматов и ее приложения.— Рига: Зинатне, 1979, вып. 10, с. 97—102.
17. Шнейдер А. А. Классификация и анализ эвристических алгоритмов раскраски вершин графа.— Кибернетика, 1984, № 4, с. 15—22.
18. Шнейдер А. А. Об одном классе оптимизационных задач проектирования дискретных устройств.— Автоматика и вычисл. техника, 1983, № 6, с. 55—56.
19. Агибалов Г. П., Беляев В. А. Технология решения комбинаторно-логических задач методом сокращенного обхода дерева поиска.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981.— 126 с.
20. Фриццович Г. Ф. Решение оптимизационных задач проектирования дискретных устройств при помощи раскраски вершин графа.— В кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях (Тез. докл. II Всесоюзн. совещ.). Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, ч. 1, с. 224—226.
21. Закревский А. Д. Логический синтез каскадных схем.— М.: Наука, 1981.
22. Новиков Я. А. Построение кратчайшей системы ДНФ по заданному множеству элементарных конъюнкций.— В кн.: Автоматизация процессов проектирования. Минск: ИГК АН БССР, 1983, вып. 1, с. 50—56.
23. Новиков Я. А. К достижению безызбыточности ПЛМ.— В кн.: Алгоритмы логического проектирования. Минск: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1983, с. 97—105.
24. Якубайтис Э. А., Буль Е. С., Ланге Э. Э. и др. Методика синтеза асинхронных автоматов на ПЛМ.— Автоматика и вычисл. техника, 1980, № 4, с. 23—31.
25. Якубайтис Э. А., Гобземис А. Ю., Фриццович Г. Ф., Чапенко В. П. Структурный синтез асинхронных автоматов.— В кн.: Теория дискретных управляющих устройств. М.: Наука, 1982, с. 190—205.
26. Поттосин Ю. В. Оптимизирующие преобразования моделей дискретных автоматов.— В кн.: ИФАК—Симпозиум «Дискретные системы». Дрезден, 1977, т. 4, с. 75—84.
27. Синтез асинхронных автоматов на ЭВМ/Под ред. А. Д. Закревского.— Минск: Наука и техника, 1975.
28. Поляков А. С. Алгоритмы поиска максимальных полных подграфов.— Автоматика и вычисл. техника, 1975, № 6, с. 1—5.
29. Поттосин Ю. В. Нахождение пустого подграфа, близкого к наибольшему.— В кн.: Алгоритмы решения логико-комбинаторных задач. Минск: ИГК АН БССР, 1976, вып. 2, с. 109—118.
30. Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов.— М.: Наука, 1971.
31. Поттосин Ю. В. Итеративный способ кодирования состояний дискретного автомата.— В кн.: Автоматизация логического проектирования дискретных устройств. Минск: ИГК АН БССР, 1980, с. 16—26.
32. Поттосин Ю. В., Поттосина С. А. Максимальное расширение двудольного подграфа в заданном графе.— В кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях (Тез. докл. II Всесоюзн. совещ.). Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, ч. 2, с. 121—123.
33. Закревский А. Д., Торопов Н. Р. Система программирования ЛЯПАС-М.— Минск: Наука и техника, 1978.— 239 с.
34. Закревский А. Д., Енин С. В., Поттосин Ю. В. Диалоговый пакет программ для автоматизации логического проектирования дискретных устройств.— В кн.: Автоматизация проектирования систем управления. М.: Финансы и статистика, 1982, вып. 4, с. 29—40.
35. Закревский А. Д., Библио П. Н., Дудкин А. А., Шнейдер А. А. Пакет программ для решения комбинаторных задач над булевыми и троичными матрицами.— Управляющие системы и машины, 1984, № 3, с. 115—118.
36. Шнейдер А. А. Некоторые результаты экспериментального исследования алгоритмов кодирования внутренних состояний асинхронных автоматов.— В кн.: Автоматизация логического проектирования дискретных

устройств. Минск: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1980, вып. 2, с. 27—32.

37. Шнейдер А. А. Алгоритмы построения кратчайшей имплицитной формы троичной матрицы.— В кн.: Автоматизированное проектирование технических систем и процессов. Минск: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1979, с. 58—63.

ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА УПРАВЛЯЮЩИХ ГРАФОВ ТРАНСЛИРУЕМЫХ ПРОГРАММ

В. Н. КАСЬЯНОВ

ВВЕДЕНИЕ

Современный способ общения с вычислительной системой уже не требует ручного кодирования машинных программ. Решение задачи, как правило, сначала формулируется человеком в виде программного текста на языке, достаточно близком к языку постановки задачи, затем этот текст с помощью других программ, называемых трансляторами, превращается в эквивалентную машинную программу. Многие задачи повышения качества трансляции как в смысле улучшения рабочих характеристик транслятора, так и в смысле оптимизации (повышения качества) получаемых машинных программ формулируются и решаются как задачи на графах.

Например, большая группа таких задач связана с эффективностью использования тех или иных ресурсов вычислительной системы в машинной программе. Сюда относятся задачи по раскраске графов для минимизации расхода памяти под переменные программы или распределения регистров; задачи по укладке деревьев и ациклических графов, возникающие при трансляции выражений; задачи по сегментации программы для минимизации числа обменов между оперативной и внешней памятью и т. д. Другая группа — это задачи эффективной реализации информационных структур, с которыми связан процесс трансляции. К ней, в частности, относятся задачи применения различных деревьев для эффективной организации больших массивов информации о транслируемой программе.

Собственно сама транслируемая программа с точки зрения многих алгоритмов оптимизирующей трансляции рассматривается и обрабатывается как ориентированный граф специального вида — так называемый управляющий граф, вершинами которого являются операторы программы, а дуги, соединяющие вершины, отражают возможность передачи управления между операторами программы при ее исполнении. Таким образом, каждому выполнению программы соответствует некоторый путь по управляюще-

му графу от его начальной вершины. Это выполнение либо конечно, когда достигается одной из конечных вершин графа, либо бесконечно.

Набор задач анализа управляющих графов транслируемых программ включает задачи по декомпозиции графа на подграфы специального вида (лучи, гамаки, зоны и т. д.); определению структурных свойств графов (интервальной сводимости, структурированности, правильности); достижению нужных структурных свойств графов (интервальной сводимости, структурированности, ацикличности и т. д.); анализу графов для определения частоты выполнения операторов и переходов программы (например, через определение отношений обязательного предшествования и преемственности между вершинами графа); нахождению специального вида нумераций и укладок графа для целей выбора эффективного порядка обработки операторов программ. Часть из них является традиционными теоретико-графовыми задачами или сводится к ним (например, проверка правильности графа сводится к задаче о нахождении транзитивного замыкания), но в основном это новые задачи для теории графов.

Данная статья представляет собой краткий обзор основных понятий и результатов, связанных с анализом управляющих графов транслируемых программ. Более подробное изложение этих результатов и их роли в решении задач оптимизирующей трансляции содержится в [1—9].

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ТЕРМИНЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Управляющим графом (или уграфом) называется конечный ориентированный граф G с множеством вершин X и дуг $V \subseteq X \times X$, в котором выделены начальная вершина $p_0 \in X$ и множество конечных вершин $Y \subseteq X$. Через n обозначается число вершин уграфа G , а через m — число его дуг. Вершина $p \in X$ называется преобразователем, если из нее исходит не более одной дуги, или распознавателем, если исходящих дуг несколько. Уграф G_1 называется правильной частью уграфа G , если G_1 получается из G удалением всех вершин и дуг, не принадлежащих путям по G от p_0 до вершин из Y . Уграф G правильный, если совпадает со своей правильной частью.

Задачу построения по уграфу G его правильной части можно решить за время $O(m)$. Здесь и далее при оценке временной сложности алгоритмов используется модель вычислительной машины с произвольным доступом к памяти, называемая равнодоступной адресной машиной (РАМ). Формальное описание РАМ можно найти в [10]. Предполагаются следующие свойства РАМ: набор операций, имеющихся в РАМ, традиционный для существующих ЭВМ; время выполнения любой команды РАМ-программы не зависит ни от выполняемой операции, ни от видов операндов,

т. е. одно и то же для всех команд; число ячеек в РАМ составляет $O(n+m)$, а каждая ячейка может содержать любое целое число с абсолютной величиной $O(n+m)$. Для спецификации границ используется следующее обозначение: если f , g и h — функции x , то равенство $f(x) = O(g(x) + h(x))$ означает существование таких констант k_1 , k_2 и k_3 , что $|f(x)| \leq k_1|g(x)| + k_2|h(x)|$ для всех x .

Следует отметить, что в работах по оптимизирующей трансляции обычно для представления и анализа сложности алгоритмов используется подход, базирующийся на специально разработанном языке программирования высокого уровня (см., например, [6]). Этот язык включает традиционные конструкции математики и языков программирования, позволяет использовать сложные типы данных (графы, очереди, стеки и т. п.) и содержит для каждой конструкции оценки сложности ее выполнения на РАМ. Такой подход дает возможность, не загружая излишней детализацией, связанной с обработкой адресов, формулировать алгоритмы в естественной и наглядной форме, допускающей прямой анализ их сложности и простой перенос на реальные языки программирования и ЭВМ с сохранением полученных оценок сложности алгоритмов.

В качестве примера рассмотрим программу на языке высокого уровня, осуществляющую за линейное время построение топологической сортировки ациклического графа (т. е. такого линейного упорядочения его вершин, которое не противоречит направлению дуг графа):

начало

G : граф;

% граф представлен в виде списков предшественников — ПРЕД(p) и преемников — ПРЕЕМ(p) для каждой вершины $p \in X$;

проц СОРТ =

начало

K : разметка = $\{(p, |\text{ПРЕД}(p)|) : p \in X\}$;

T : обход = $\{(i, \Omega) : i \in [1 : |X|]\}$;

C : список = $\{p \in X : K(p) = 0\}$;

ввод G ;

$r := 1$;

пока $C \neq \emptyset$ цикл

$p := \text{ЭВМ } C$; $T(r) := p$; $r := r + 1$;

для всех q из ПРЕЕМ(p) цикл

$K(q) := K(q) - 1$;

если $K(q) = 0$, то $C \leftarrow q$ все

все все;

вывод T

конец;

СОРТ

конец;

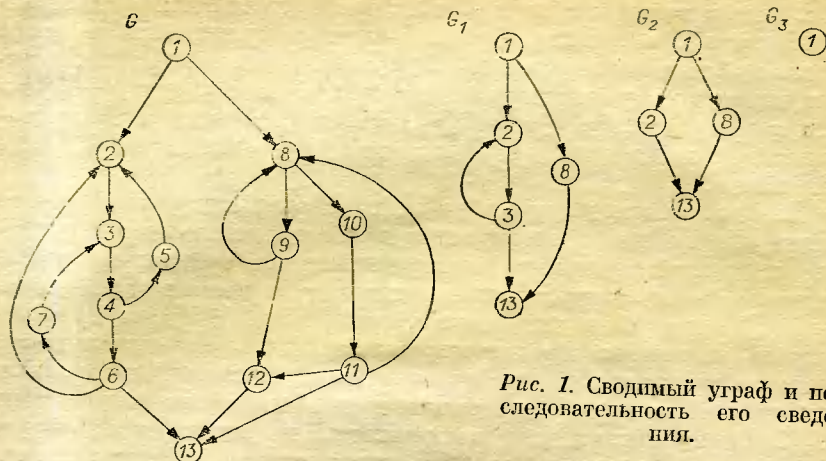


Рис. 1. Сводимый уграф и последовательность его сведения.

Здесь (как и обычно) программа представляет собой последовательность глобальных описаний переменных, процедур и функций, за которой следует оператор вызова основной процедуры; пустой список обозначается через $\langle \emptyset \rangle$, а неопределенное значение — через $\langle \Omega \rangle$; $\langle \leftarrow \rangle$ — это операция добавления элемента в произвольное место списка, а $\langle \Rightarrow \rangle$ — операция извлечения произвольного элемента из списка.

В дальнейшем предполагается, что уграф G является правильным. Правильность уграфа G означает, что $n \leq m + 1$. Пусть C обозначает подграф графа G и пусть p и q — две такие вершины G , что p принадлежит C , а q не принадлежит. Вершина p называется начальной у C в G , если либо $p = p_0$, либо в p заходит дуга уграфа, не принадлежащая C . Вершина p — выходная у C в G , если либо $p \in Y$, либо из p исходит дуга уграфа, не принадлежащая C . Вершина p называется входной (или просто входом) у C в G , если существует путь по G от p_0 до p , не содержащий вершин из C , отличных от p . Вершина q называется конечной у C в G , если q является приемником хотя бы одной вершины из C .

В качестве примера рассмотрим уграф G , приведенный на рис. 1 и состоящий из 13 вершин и 19 дуг. Здесь и в последующих примерах предполагается, что X — это множество целых чисел, лежащих в диапазоне от 1 до n (обозначаем через $[1:n]$), а 1 и n — это начальная и конечная вершины уграфа G . Рассмотрим подграф $[2:5]$ уграфа G (здесь и далее одинаково обозначается подмножество вершин уграфа и подграф, им порожденный). Он имеет две начальные вершины (2 и 3), только одна из которых (вершина 2) входная, и одну конечную, которой является вершина 6.

Отображение F множества вершин X на множество $[1:n]$ называется нумерацией (вершин) уграфа G . Если F — некоторая

нумерация уграфа G , то $F(p)$ обозначает F -номер вершины p , $F^{-1}(k)$ — вершину с F -номером k , а $F[i:j]$ — множество вершин $\{p \in X : F(p) \in [i:j]\}$. Дуга (p, q) уграфа G называется F -прямой, если $F(p) < F(q)$, или F -обратной, если $F(p) \geq F(q)$. Когда путь P от p до q не содержит F -обратных дуг, он является F -путем, а вершина q — F -достижимой из вершины p . F -областью вершины p (обозначаем $F[p]$ или $F[i]$, где $F(p) = i$) называется подграф уграфа G , множеством вершин которого будут все те вершины уграфа, из которых достижима вершина p в подграфе $F[i:n]$.

Предположим, что нумерация F сопоставляет каждой вершине i графа G , изображенного на рис. 1, номер $F(i)$, равный i . Тогда любой простой путь по G от 1 до 13 есть F -путь, все вершины уграфа F -достижимы из вершины 1, F -областью вершины 2 является подграф $[2:7]$, а F -область вершины 10 — это тривиальный подграф, состоящий из одной вершины 10.

2. ОПЕРАТОРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Языкам программирования свойственна некоторая иерархия операторных конструкций. Например, из простых операторов могут составляться конструкции более сложного вида: составной оператор, оператор выбора, оператор цикла. Отражением соответствующих понятий являются такие типы подграфов уграфа G , как луч, гамак и зона, играющие важную роль во многих алгоритмах трансляции.

2.1. Лучи

Простой путь $P = (p_1, \dots, p_r)$, $r \geq 1$, по G называется лучом [12] (или линейным участком), если каждая вершина из $\{p_1, \dots, p_{r-1}\}$ является преобразователем, а подграф уграфа G , порожденный вершинами пути P , имеет единственную начальную вершину. Нумерация F уграфа G называется правильной [11], если для любого луча $P = (p_1, \dots, p_r)$ уграфа G и любого i , $i \in [1:r-1]$, выполняется $F(p_i) = F(p_{i+1}) - 1$.

Уграф G , изображенный на рис. 1, содержит следующие лучи: (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (3, 4), (8, 9), (10, 11); и нумерация F , для которой $F(i) = i$, правильная. Здесь и в других примерах предполагается, что 1 — это начальная вершина уграфа G , а n — его единственная конечная вершина.

Теорема 1 [11]. Любой уграф G имеет правильную нумерацию; правильная нумерация уграфа G , а также все начальные и выходные вершины максимальных его лучей можно найти за время $O(n)$.

2.2. Гамаки

Подграф, имеющий одну начальную вершину и не более одной конечной, называется гамаком [7], если в множестве предшественников начальной вершины подграфа не содержится конечная.

Гамак C называется линейной компонентой [13] уграфа G , если выполнены следующие три свойства: 1) начальная и конечная (если она есть) вершины гамака C принадлежат каждому пути по G от p_0 до вершин из Y ; 2) начальная вершина гамака C не достижима в G из конечной вершины гамака C ; 3) C не содержит собственного подграфа, который был бы гамаком и удовлетворял первым двум свойствам.

Уграф G , изображенный на рис. 1, содержит следующие гамаки: $\{12\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{10\}$, $\{13\}$, $\{2, 3, 4, 5, 7\}$, $[8:12]$, $[1:13]$, $[1:12]$; из них гамаки $[1:12]$ и $\{13\}$ являются линейными компонентами уграфа.

Теорема 2 [14]. *Гамаки уграфа G могут быть найдены за время $O(nt)$, линейные компоненты уграфа G — за время $O(t)$.*

Следует заметить, что уграф G , не содержащий распознавателей, имеет $n-1$ дугу и $(n/2)t$ гамаков.

2.3. Зоны

Нетривиальный сильно связанный подграф уграфа называется зоной [15]. Множество зон α уграфа G образует иерархию вложенных зон [16], если выполняются следующие два свойства: любая пара зон S_1 и S_2 из α либо не пересекается, либо одна из зон содержится в другой; для любой зоны S уграфа G существует такая зона S_1 из α , что $S \equiv S_1$, и у зон S и S_1 есть общая входная вершина.

Уграф G , изображенный на рис. 1, содержит зоны $[2:5]$, $[8:11]$, $\{3, 4, 6, 7\}$, $[2:7]$ и $\{8, 9\}$. Множество зон, состоящее из $[2:7]$, $[8:11]$, $\{3, 4, 6, 7\}$ и $\{8, 9\}$, образует иерархию зон уграфа G .

Теорема 3 [17]. *Иерархия вложенных зон уграфа G может быть построена за время $O(nt)$.*

3. ИНТЕРВАЛЬНАЯ СВОДИМОСТЬ

Многие задачи создания и обработки программы существенно упрощаются, если ее можно представить в виде иерархии операторных конструкций простой структуры. С разных точек зрения (например, в структурном программировании) в качестве базовых выбираются разные типы операторных конструкций, но у всех у них структура управления есть частный случай интервала. Разрешив брать в качестве базовых конструкций любые такие, управляющая структура которых является интервалом,

получим класс программ с интервально сводимыми угра́рами. Важное свойство этого класса — возможность автоматически по любой программе строить эквивалентную ей программу с интервально-сводимым угра́фом.

3.1. Понятие сводимого угра́фа

Подгра́ф угра́фа G называется интервалом [18], если имеет единственную начальную вершину и она принадлежит каждой зоне угра́фа G , содержащейся в этом подгра́фе. Поскольку I — множество максимальных интервалов угра́фа G — выделяется однозначно, интервалы из I попарно не пересекаются и содержат все вершины из G (т. е. образуют разбиение угра́фа G), для любого угра́фа G определен однозначно так называемый фактор-угра́ф $I(G)$ угра́фа G относительно I , который получается из G стягиванием подгра́фов из I в угра́фе G в вершины. Более точно, пусть β — множество подгра́фов угра́фа G с единственными начальными вершинами (такие подгра́фы называются альтами [4]), образующее разбиение G . Фактор-угра́ф G_1 угра́фа G относительно β обозначается $\beta(G)$ и определяется следующим образом [4]. Множество вершин угра́фа G_1 — это множество начальных вершин подгра́фов из β ; а пара вершин p и q образует его дугу (p, q) тогда и только тогда, когда в G существует дуга (p_1, q) , где p_1 — вершина того подгра́фа из β , у которого p — начальная вершина. Начальной вершиной у G_1 является p_0 , а конечными — начальные вершины подгра́фов из β , содержащие вершины из Y .

Пусть G_1 и G_2 — некоторые два угра́фа и пусть $k > 0$. Угра́ф G_1 k -производный от угра́фа G_2 (обозначается $G_1 = I_k(G_2)$), если при $k = 1$ угра́ф G_1 есть фактор-угра́ф угра́фа G_2 относительно множества его максимальных интервалов, а при $k > 1$ угра́ф G_1 определяется как угра́ф $I_{k-1}(I(G))$. Угра́ф G_3 называется предельным от G_2 , если $G_3 = I(G_3)$ и существует такое k , что $G_3 = I_k(G_2)$.

Угра́ф G (интервально) сводимый [18], если состоит из единственной вершины и не содержит дуг (т. е. является тривиальным) предельный угра́ф от G , или (интервально) несводимый в противном случае.

Последовательность угра́фов G_0, G_1, \dots, G_r , в которой $G_0 = G$, G_r — тривиальный угра́ф, а $G_i = I(G_{i-1})$ для любого $i > 0$, называется последовательностью сведения, а ее длина r обозначается через $l(G)$.

На рис. 1 изображены сводимый угра́ф G и последовательность его сведения длины три. Рис. 2 содержит простой пример несводимого угра́фа G , для которого $I(G) = G$.

Теорема 4 [19]. Проверку сводимости угра́фа G можно осуществить за время $O(m \log^* n)$.

Здесь и далее $\log^* n$ обозначает такое наименьшее число r , что $F(r) \geq n$, где F — это функция, для которой $F(0) = 1$ и $F(i) = 2^{F(i-1)}$ при $i > 0$. Следует заметить, что фактически вре-

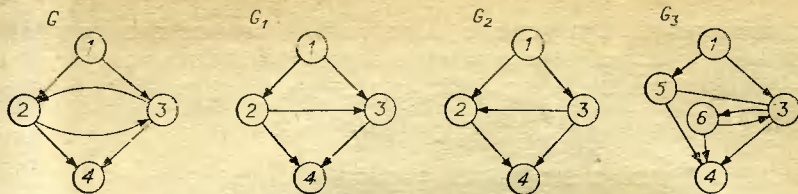


Рис. 2. Несводимый уграф, его каркасы и эквивалентный ему сводимый уграф.

менная сложность алгоритма проверки сводимости уграфа является более медленно растущей функцией. Нелинейная его оценка возникает здесь из-за подзадачи, которая формулируется как выполнение последовательности σ команд, каждая из которых представляет собой операцию одного из двух видов: НАЙТИ и ОБЪЕДИНИТЬ, работающих над непересекающимися подмножествами вершин уграфа. НАЙТИ (p) выдает имя того подмножества, которому в данный момент принадлежит вершина p ; ОБЪЕДИНИТЬ (S_1, S_2, S_3) строит подмножество $S_3 = S_1 \cup S_2$, а σ содержит не более n команд ОБЪЕДИНИТЬ и не более m команд НАЙТИ. Исследования в [20] показали, что алгоритм быстрого объединения непересекающихся множеств, решающих задачу ОБЪЕДИНИТЬ — НАЙТИ, имеет сложность $O(m\alpha(m, n))$, где $\alpha(m, n)$ — очень медленно растущая функция, обратная функции Аккермана. Аналогичное утверждение справедливо и для алгоритма построения по уграфу дерева обязательного предшествования (см. теорему 14), в котором также встречается подзадача ОБЪЕДИНИТЬ — НАЙТИ.

3.2. Критерии сводимости

Для решения задач трансляции разработан ряд алгоритмов, эффективно их решающих в том случае, когда уграф транслируемой программы обладает определенными свойствами. Оказалось, что эти свойства выделяют один класс — класс сводимых уграфов.

3.2.1. Аранжируемость, одноходовость и обобщенная сводимость. Такая нумерация F уграфа G , что каждый простой путь по G от p_0 является F -путем, называется аранжировкой. Уграф считается аранжируемым [13], если существует его аранжировка, или неаранжируемым в противном случае.

Уграф G называется одноходовым [21], если каждая его зона имеет единственный вход, или неоднородным, если в G есть многоходовая зона. Заметим, что не каждая начальная вершина некоторой зоны S уграфа G может быть входом, но если S — это бикомпонента или максимальная многоходовая зона в G , то множества начальных и входных вершин у S совпадают.

Уграф G называется обобщенно (интервально) сводимым [4], если существует последовательность уграфов G_0, G_1, \dots, G_r ,

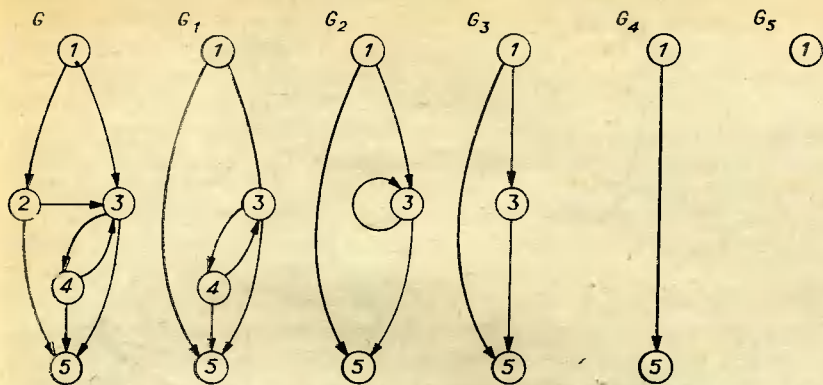


Рис. 3. Разбор сводимого уграфа.

в которой $G_0 = G$, G_r — тривиальный уграф, а каждый G_i является фактор-уграфом уграфа G_{i-1} относительно некоторого разбиения его на интервалы.

Теорема 5 [4, 21]. Совпадают классы сводимых, аранжированных, одновходовых и обобщенно сводимых уграфов.

3.2.2. Разборность. Разборность уграфа G определяется [23] как возможность получения из него тривиального уграфа с помощью следующих двух преобразований: $T1$ — удаление петли и $T2$ — слияние двух вершин. $T1$ состоит в удалении дуги (p, p) из G для некоторой вершины p . $T2$ применимо только к такой паре вершин p и q , что p является единственным предшественником q ; результат его применения — удаление из G вершины q и дуги (p, q) , включение множества преемников вершины q в множество преемников вершины p и объявление p конечной вершиной вместо q , если $q \in Y$.

Рис. 3 содержит пример разборной схемы G ; в последовательности $G_0 = G$, G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , G_5 каждый следующий уграф получается из предыдущего с помощью $T2$, за исключением уграфа G_3 , который получается из G_2 с помощью $T1$.

Теорема 6 [23]. Уграф разборен тогда и только тогда, когда он сводим.

Любую последовательность применений к уграфу G преобразований $T1$ и $T2$ можно однозначно представить в виде последовательности, состоящей из элементов вида $(T1, p, Z)$ и $(T2, p, q, Z)$, где p и q — вершины G , Z — подмножество его дуг. Такое описание последовательности сведения преобразованиями $T1$ и $T2$ разборного уграфа в тривиальный называется [24] его разбором. Например, для G , изображенного на рис. 3, разбор имеет вид $(T2, 1, 2, \{(1, 2)\})$, $(T2, 3, 4, \{(3, 4)\})$, $(T1, 3, \{(4, 3)\})$, $(T2, 4, 3, \{(1, 3), (2, 3)\})$, $(T2, 1, 5, \{(4, 5), (3, 5), (2, 5)\})$.

3.2.3. Каркас. Каркасом уграфа G называется [24] такой ациклический уграф G_1 , в котором G_1 — остов уграфа G и добавля

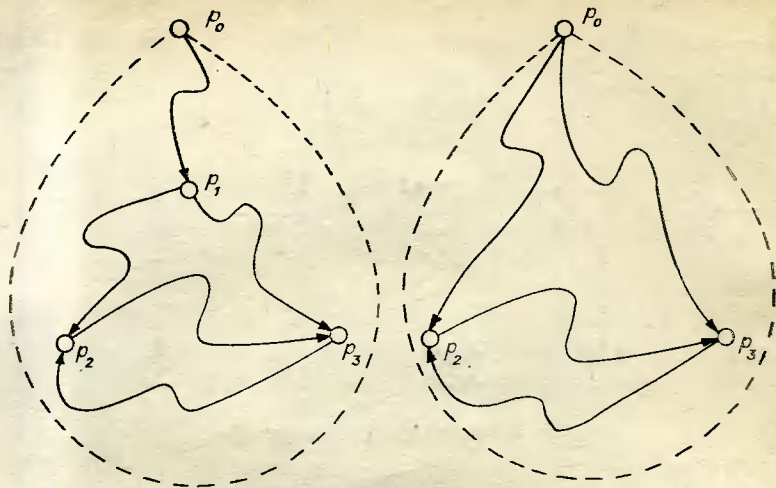


Рис. 4. Вид запрещенного подграфа.

ление к G_1 еще одной любой дуги из G нарушает ацикличность G_1 . На рис. 2 изображены уграф G и два его каркаса G_1 и G_2 .

Теорема 7 [24]. Уграф сводим тогда и только тогда, когда он имеет единственный каркас.

3.2.4. Запрещенный подграф. Считают [23], что уграф G содержит запрещенный подграф (см. рис. 4), если в G существуют три такие различные вершины p_1 , p_2 и p_3 , что найдутся попарно не пересекающиеся по внутренним вершинам простые пути $P_{0,1}$, $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, $P_{2,3}$ и $P_{3,2}$, где $P_{i,j}$ обозначает путь от вершины p_i до вершины p_j ($i, j \in [0:3]$).

Теорема 8 [23]. Уграф содержит запрещенный подграф тогда и только тогда, когда он несводим.

3.3. Преобразование несводимых уграфов

Если исходный уграф G несводим, то можно попытаться преобразовать его за счет дублирования (копирования) некоторых вершин в такой сводимый уграф G_1 , что G и G_1 эквивалентны, т. е. являются уграфами эквивалентных программ. Дублирование позволяет осуществлять эквивалентные преобразования программы таким образом, чтобы не увеличивать времени счета по программе и не привлекать другую информацию о программе кроме ее уграфа.

Примером эквивалентного дублирования является преобразование ТЗ, называемое расщеплением вершин [18]. Применение ТЗ возможно к любой такой вершине p уграфа G , что $p \neq p_0$ и G не имеет петли (p, p) ; в результате применения ТЗ к вершине p вершина p заменяется на r экземпляров, где r — число дуг, заходящих в p , по одному экземпляру для каждой заходящей в

p дуги. На рис. 2 приведен пример уграфа G_3 , полученного из G расщеплением вершины 2.

Теорема 9 [18]. Любой уграф G с помощью преобразований T_1 , T_2 и T_3 сводится к тривиальному.

Теорема 10 [25]. Существует алгоритм, который по любому уграфу G за счет эквивалентного дублирования вершин строит сводимый уграф, имеющий не более чем $2^{n-2} + 1$ вершину. Существует такой уграф G , что любой сводимый уграф, полученный за счет эквивалентного дублирования его вершин, содержит не менее чем $2^{n-2} + 1$ вершину.

Для любой вершины p уграфа G обозначим через $m(p)$ количество различных многоходовых зон уграфа G , содержащих p , а через $k(p)$ минимальное такое число, что имеется множество, состоящее из $k(p)$ вершин и включающее хотя бы по одной вершине каждой из тех многоходовых зон уграфа G , которые целиком лежат в максимальной многоходовой зоне, содержащей вершину p .

Теорема 11 [25]. Существует алгоритм, который эквивалентными дублированиями вершин преобразует любой уграф G в такой сводимый уграф, в котором имеется не более чем $2^{\min(m(p), k(p))}$ экземпляров любой вершины p уграфа G .

Исследования [26] характеристик реальных программ показывают, что 90% уграфов сводимы, причем в среднем $l(G) \approx 2,75$, а зоны занимают небольшую часть программы (около 4%). Отсюда в силу теоремы 11 можно сделать вывод о том, что в реальных случаях, как правило, G сводим, а если несводим, то его преобразование для получения сводимости не потребует даже двухкратного увеличения его размера при сохранении времени счета по программе.

3.4. Минимальное множество, разрезающее контуры

В качестве примера того, что сводимость уграфа G упрощает решение задач анализа G , рассмотрим задачу (см. также теорему 17) нахождения минимального (по числу вершин) множества, содержащего по крайней мере по одной вершине из каждой зоны уграфа. Известно, что эта задача является NP -полной.

Теорема 12 [27]. Существует алгоритм с временной сложностью $O(m)$, который по любому уграфу G либо строит минимальное разрезающее контуры множество для G , либо определяет несводимость G .

4. ЧАСТОТНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Одним из основных видов информации, собираемой при анализе уграфов транслируемых программ, являются сведения о частоте выполнения групп ее операторов и переходов. Информация о достоверных отношениях частот — составная часть кон-

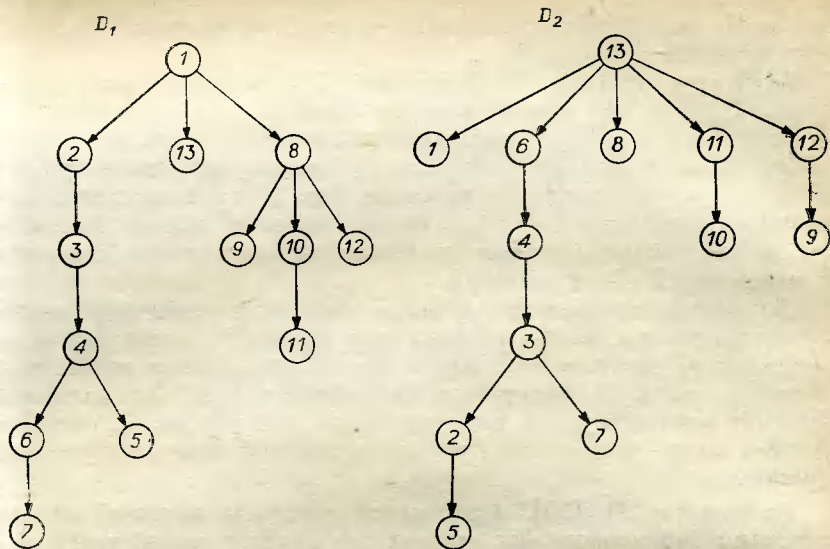


Рис. 5. Деревья обязательного предшествования и обязательной преемственности.

текстных условий большинства оптимизирующих преобразований. Эти отношения для двух групп M_1 и M_2 операторов и переходов определяются (см. [17]) в терминах множества Π — путей по G от начальной вершины до конечных. M_1 и M_2 выполняются «одинаково часто», если $|P \cap M_1| = |P \cap M_2|$ для любого пути P из Π . M_1 выполняется «чаще» M_2 , если $|P \cap M_1| \leq |P \cap M_2|$ для любого P из Π и существует такой P в Π , что $|P \cap M_1| < |P \cap M_2|$.

Частичная информация о достоверных отношениях частот получается при выделении операторных конструкций уграфа: например, все операторы одного и того же луча выполняются одинаково часто. Однако существующие подходы [17] к определению полной информации о достоверных отношениях требуют решения задачи нахождения всех контуров уграфа, которая достаточно сложна (см., например, [28]).

Теорема 13 [17]. Существует алгоритм с временной сложностью $O(nm)$, приписывающий всем элементам (вершинам и дугам) любого сводимого уграфа векторы частот таким образом, что лексико-графическое упорядочение для векторов частот подмножеств элементов уграфа, полученных простым покомпонентным суммированием векторов элементов подмножеств, не противоречит достоверным отношениям частот их выполнения.

Отношения доминирования (обязательного предшествования и обязательной преемственности) довольно просты для обнаружения и кодируют достоверные отношения частот выполнения операторов и переходов, принадлежащих одним и тем же зонам, и поэтому широко используются на практике.

Вершина p обязательно предшествует вершине q [29], если p принадлежит каждому пути по G от p_0 до q . Вершина p обязательно следует за вершиной q [29], если p принадлежит каждому пути от q до любой вершины из Y . Для любой вершины p уграфа G отношение обязательного предшествования (обязательной преемственности) является отношением линейного порядка на множестве всех обязательных предшественников (соответственно преемников) данной вершины p . Ближайший к p обязательный предшественник (преемник) вершины p , отличный от p , называется непосредственным обязательным предшественником (соответственно преемником) вершины p .

Для уграфа G , изображенного на рис. 1, деревья D_1 и D_2 , кодирующие отношения непосредственного обязательного предшествования и преемственности, будут иметь вид, представленный на рис. 5.

Теорема 14 [30]. *Существует алгоритм, который за время $O(m + n \log^* n)$ строит дерево непосредственного обязательного предшествования для любого уграфа G .*

5. ВЫБОР ПОРЯДКА ОБРАБОТКИ ОПЕРАТОРОВ

Последовательность порядка обработки операторов оптимизируемой программы во многом влияет на скорость работы алгоритма. Ряд алгоритмов обрабатывает операторы программы до тех пор, пока последовательность обработанных вершин не будет содержать в качестве подпоследовательностей все простые пути по уграфу программы или все его простые несокращаемые пути. В основе большинства эффективных алгоритмов анализа уграфов транслируемых программ содержатся специального вида нумерации вершин уграфа, получившие название базисных.

5.1. Базисные нумерации

Прямой называется [14] такая нумерация M уграфа G , для которой справедливы следующие три свойства: 1) $M(p_0) = 1$; 2) в любую вершину p , отличную от p_0 , заходит хотя бы одна M -прямая дуга; 3) если (p, q) такая M -прямая дуга, что не существует M -прямой дуги (p_1, q) , где $M(p) < M(p_1)$, то M -номер любой конечной вершины подграфа $M[M(p) + 1 : M(q) - 1]$ не превышает $M(q)$.

Нумерация N вершин уграфа G называется обратной [14], если существует такая прямая нумерация M , что для любых двух вершин уграфа p и q выполняется $N(p) < N(q)$ тогда и только тогда, когда либо вершина q является M -достижимой из вершины p , либо $M(q) < M(p)$ и вершина p не является M -достижимой из вершины q . Пример возможных базисных нумераций уграфа G изображен на рис. 6: первым указан M -номер соответствующей вершины, а вторым — ее N -номер.

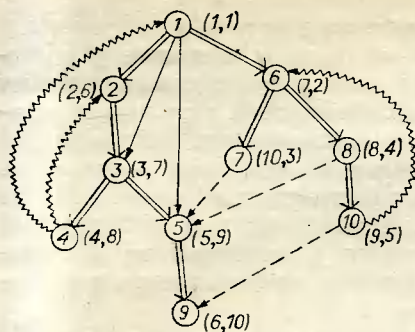


Рис. 6. Базисные нумерации и глубинное остовное дерево.

Базисные нумерации тесно связаны с определенным движением по уграфу (так называемый возвратный ход, бектрекинг или поиск в глубину), когда за счет чередования переходов от предшественника к преемнику и наоборот осуществляется просмотр (прохождение) всех вершин уграфа. Движение начинается и заканчивается просмотром начальной вершины. Этот просмотр задает переход по дуге от просматриваемой вершины к од-

ному из непросмотренных преемников, если такие есть, в противном случае — к тому ее предшественнику, который вызвал просмотр. Прямая нумерация отражает порядок, в котором при возвратном ходе вершины уграфа просматривались в первый раз, а обратная — обратный порядок их просмотра в последний раз. Процесс возвратного хода по G удобно описывать и реализовать как процесс конструирования некоторого пути по G от p_0 [31]. При таком подходе осуществление возвратного хода с построением базисных нумераций требует времени $O(m)$.

Каждый уграф G имеет по крайней мере одну пару базисных нумераций M и N , но не обязательно единственную. Каждая такая пара соответствует одному из возможных способов возвратного хода по G , реализующихся порядком выбора непросмотренного преемника просмотренной вершины. В процессе возвратного хода просматривается часть дуг уграфа G , которые вместе с вершинами X образуют упорядоченное дерево D , получившее название [32] глубинного остовного. Множество дуг уграфа G относительно каждого его глубинного остовного дерева D разбивается на множества так называемых [32] древесных, обратных, прямых и поперечных дуг. На рис. 6 эти дуги даны двойными, волнистыми, сплошными ординарными и штриховыми линиями соответственно. Древесные дуги — это дуги дерева D ; каждая обратная дуга при добавлении к D приводит к возникновению в нем зопы; дуга (p, q) уграфа G называется прямой, если q достижима из p в D , но (p, q) не является древесной дугой; дуга (p, q) уграфа G называется поперечной относительно D , если ни p из q , ни q из p не достижимы в D . Базисные нумерации уграфа G и соответствующее им глубинное остовное дерево однозначно определяют друг друга.

Теорема 15 [24]. Для любой дуги (p, q) сводимого уграфа G следующие свойства эквивалентны: 1) (p, q) — обратная дуга для некоторого глубинного остовного дерева уграфа G ; 2) q обязательно предшествует p ; 3) для некоторого разбора G дуга

(p, q) входит в множество Z из $(T1, q, Z)$; 4) (p, q) не принадлежит каркасу уграфа G .

Глубиной уграфа G (обозначаем $d(G)$) называется [33] такое максимальное число r , что существует глубинное остовное дерево уграфа D и простой путь P по G , что P содержит r дуг, обратных относительно D .

Теорема 16 [33]. Если G — сводимый уграф, то $l(G) \geq d(G)$.

Теорема 17 [34]. Задача нахождения глубины любого уграфа является NP -полной; существует алгоритм, осуществляющий нахождение глубины любого сводимого уграфа G за время $O(nm)$.

Приведем некоторые из важных свойств базисных нумераций.

Теорема 18 [31]. Подграф S является бикомпонентой уграфа G тогда и только тогда, когда существует такая вершина p , что $S = N[p]$ и $p \notin N[i]$ для любого $i < N(p)$.

Использование этого свойства позволяет осуществлять выделение бикомпонент уграфа G за время $O(m)$ [35].

Теорема 19 [14]. Множество γ всех нетривиальных N -областей в уграфе G образует иерархию вложенных зон уграфа G . Уграф G сводим тогда и только тогда, когда каждый подграф из γ имеет единственную начальную вершину. Если G — сводимый уграф, то его N -нумерация является аранжировкой.

5.2. Укладки

Последовательность $L = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ вершин уграфа G называется [36] его сильной укладкой длины r , если любой простой путь P по G можно получить из L удалением некоторых вершин, т. е. $P = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r$.

Нетрудно видеть, что $L = (1, 2, \dots, n, 1, 2, \dots, n, \dots, 1, 2, \dots, n, 1)$ длины $n(n-1)+1$ является сильной укладкой для любого G и аранжировка ациклического уграфа G является его сильной укладкой.

Теорема 20 [22]. Для любого сводимого G существует сильная укладка, длина которой не превышает $n + cn \log n$, где $c = 3/\log(3/2)$. Существует алгоритм, который по любому сводимому уграфу с $m = O(n)$ за время $O(n \log n)$ строит его сильную укладку длины $O(n \log n)$.

Простой путь по G называется несокращаемым, если нельзя, удалив некоторые его внутренние вершины, получить другой простой путь по G , и сокращаемым в противном случае. Последовательность L вершин уграфа G называется [36] его слабой укладкой, если любой несокращаемый простой путь по G можно получить из L удалением некоторых его вершин. Назовем уграф G простым, если каждая его вершина имеет не более двух предшественников и не более двух преемников. Таким образом, в любом простом уграфе $m < 2n$.

Теорема 21 [37]. Для бесконечного множества значений n существуют сводимые уграфы, являющиеся простыми и не имею-

щами слабых укладок длины меньше $(n/2) \log n - O(n \log \log n)$.

Теорема 22 [37]. Для бесконечного множества значений n существуют простые уграфы, у которых минимальная длина слабой укладки не меньше, чем cn^2 , где c — некоторая положительная константа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции.— М.: Мир, 1978, т. 2.
2. Евстигнеев В. А. Теория графов и программирование.— Новосибирск: НГУ, 1978.
3. Евстигнеев В. А. Применение теории графов в программировании.— М.: Наука, 1984.
4. Касьянов В. Н. Методы анализа программ.— Новосибирск: НГУ, 1982.
5. Касьянов В. Н. Оптимизация программ.— В кн.: Прикладная информатика. М.: Финансы и статистика, 1983, вып. 2, с. 38—76.
6. Касьянов В. Н. Введение в теорию оптимизации программ.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.
7. Касьянов В. Н., Поттосин И. В. Технология трансляции.— Новосибирск: НГУ, 1979.
8. Hecht M. S. Flow analysis of computer programs.— N. Y.: North-Holland, 1977.
9. Program Flow Analysis: Theory and Applications/Ed. S. S. Muchnic, N. D. Jones.— N. Y.: Englewood Cliffs; Prentice-Hall, 1981.
10. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.— М.: Мир, 1979.
11. Касьянов В. Н. Быстрый алгоритм выделения максимальных линейных участков в программе.— В кн.: Математическая теория и практика систем программного обеспечения. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 81—87.
12. Поддерюгин В. Д. Программа контроля для СТРЕЛЫ-3 (луч).— М.: ВЦ АН СССР, 1960.
13. Поттосин И. В. О линейаризации программы и частичном ее упорядочении.— В кн.: Системное и теоретическое программирование. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972, с. 278—286.
14. Касьянов В. Н. Анализ структур программ.— Кибернетика, 1980, № 1, с. 48—61.
15. Allen F. E. Program optimization.— Annu. Rev. Automat. Program., 1969, v. 5, p. 239—307.
16. Earnest C. P., Balke K. G., Anderson J. Analysis of graphs by ordering of nodes.— J. of the ACM, 1972, v. 19, N 1, p. 23—42.
17. Касьянов В. Н. К оценке частоты выполнения операторов и переходов в программе.— Программирование, 1975, № 5, с. 64—72.
18. Cocke J. Global common subexpression elimination.— ACM SIGPLAN Notices, 1970, v. 5, N 7, p. 20—24.
19. Tarjan R. E. Testing flow graph reducibility.— J. Comput. and Syst. Sci., 1974, v. 9, N 3, p. 355—365.
20. Tarjan R. E., Van Leeuwen J. Worst-case analysis of set union algorithm.— J. of the ACM, 1984, v. 31, N 2, p. 245—281.
21. Kasyanov V. N. Some properties of fully reducible graphs.— Inform. Process. Letters, 1973, v. 2, N 4, p. 113—117.
22. Aho A. V., Ullman J. D. Node listings for reducible flow graphs.— J. Comput. and Syst. Sci., 1976, v. 13, N 3, p. 286—299.
23. Hecht M. S., Ullman J. D. Flow graph reducibility.— SIAM J. of Comp., 1972, v. 1, N 2, p. 188—202.
24. Hecht M. S., Ullman J. D. Characterizations of reducible flow graphs.— J. of the ACM, 1974, v. 24, N 3, p. 367—375.

25. Касьянов В. Н. Экономное преобразование несводимых графов.— В кн.: Системное и теоретическое программирование, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973, с. 143—172.
26. Knuth D. E. An empirical study of FORTRAN programs. *Software — Pract. and Exper.*, 1971, v. 1, N 2, p. 105—133.
27. Shamir A. A linear time algorithm for finding minimum cutsets in reducible graphs.— *SIAM J. on Comput.*, 1979, v. 8, N 4, p. 645—655.
28. Johnson D. B. Finding all the elementary circuits of a directed graph.— *SIAM J. on Comp.*, 1975, v. 4, N 1, p. 77—84.
29. Lowry E., Medlock C. W. Object code optimization.— *Comm. of the ACM*, 1969, v. 12, N 1, p. 13—22.
30. Lengauer T., Tarjan R. E. A fast algorithm for finding dominators in a flow graphs.— *ACM Trans. Prog. Lang. Syst.*, 1979, v. 1, N 3, p. 121—141.
31. Касьянов В. Н. Выделение гамаков в ориентированном графе.— Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 5, с. 1020—1022.
32. Tarjan R. E. Depth first search and linear graph algorithms.— *SIAM J. on Comput.*, 1972, v. 1, N 2, p. 146—160.
33. Hecht M. S., Ullman J. D. A simple algorithm for global data flow analysis problems.— *SIAM J. on Comput.*, 1975, v. 4, N 4, p. 519—532.
34. Fong A., Ullman J. D. Finding the depth of a flow graph.— *J. Comput. and System. Sci.*, 1977, v. 15, N 4, p. 300—309.
35. Касьянов В. Н. Об одном алгоритме выделения бикомпонент в ориентированном графе.— В кн.: Системное и теоретическое программирование. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974, с. 235—243.
36. Kennedy K. Node listing applies to data flow analysis.— In: *Proc. of 2nd ACM Symp. on Principles of Programm. Languages*, 1975, p. 10—21.
37. Markowsky G., Tarjan R. E. Lower bounds on the length of node sequences in directed graphs.— *Discrete Mathematics*, 1976, v. 16, p. 329—337.

ГИПЕРСЕТИ

И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЯЗНОСТИ

В. К. ПОПКОВ

В работе рассматривается классификация гиперсетей, приведены определения маршрутов, отделимости и соединимости вершин в гиперсетях и алгоритмы их вычисления в том случае, когда указанные задачи не *NP*-полные. Исследуются методы синтеза некоторых классов гиперсетей с заданной связностью. Гиперсети в качестве математических моделей связности сложных систем — наиболее адекватные модели структур сетей связи, энергетических, транспортных, нефте- и газопроводов и т. п. В процессе синтеза их структур важно учитывать не только оптимизацию, но и структурную надежность систем. Этим объясняется актуальность исследования характеристик связности гиперсетей.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Абстрактные гиперсети. Шестерку $S = (X, V, R; P, F, W)$ назовем абстрактной гиперсетью, если $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — множество вершин;

$V = (v_1, v_2, \dots, v_q)$ — множество ветвей;

$R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ — множество ребер;

$P: V \rightarrow 2^X$ — отображение, сопоставляющее каждому элементу $v \in V$ множество $P(v) \subseteq X$ его вершин. Тем самым отображение P определяет гиперграф $PS = (X, V; P)$;

$F: R \rightarrow 2^V_{PS}$ — отображение, сопоставляющее каждому элементу $r \in R$ множество $F(r) \subseteq V$ его ветвей. Причем семейство подмножеств ветвей 2^V_{PS} содержит только такие, ветви которых составляют связную часть гиперграфа PS . Отображение F определяет гиперграф $FS = (V, R; F)$;

$\forall r \in R \quad W: r \rightarrow 2^{P(F(r))}$ — отображение, сопоставляющее каждому элементу $r \in R$ подмножество $W(r) \subseteq P(F(r)) \subseteq X$ его вершин, где $P(F(r))$ — множество вершин в PS , инцидентных ветвям $F(r) \subseteq V$. Таким образом, отображение W определяет гиперграф $WS = (X, R; W)$.

Гиперграф PS назовем первичной сетью гиперсети S , а гиперграф WS — вторичной сетью гиперсети S . Обратные отображения определяются следующим образом:

$$P^{-1}(x) = \{v : x \in P(v)\}, \quad F^{-1}(v) = \{r : v \in F(r)\},$$

$$W^{-1}(x) = \{r : x \in W(r)\}.$$

В некоторых случаях для удобства будем использовать следующие обозначения гиперсетей: S , $S = (X, V, R)$, $S = (PS, WS; \Phi)$. В первом случае указывается только «имя» абстрактной гиперсети, во втором — образующие множества, а в третьем — «имена» первичной и вторичной сетей гиперсети S и отображение $\Phi: WS \rightarrow PS$.

Абстрактные гиперсети допускают одно важное для моделирования систем сетевой структуры обобщение. Пусть заданы гиперграфы $PS = (X, V; P) = WS_0 = (X, R_0; W_0)$, $WS_1 = (Y_1, R_1; W_1), \dots, WS_k = (Y_k, R_k; W_k)$. Тогда последовательность отображений $\Phi_i: WS_k \xrightarrow{\Phi_k} WS_{k-1} \xrightarrow{\Phi_{k-1}} \dots \xrightarrow{\Phi_2} WS_1 \xrightarrow{\Phi_1} WS_0$ определяет иерархическую абстрактную k -гиперсеть $S = (PS, WS_1, \dots, WS_k; \Phi_1, \dots, \Phi_k)$, если $Y_k \subseteq Y_{k-1} \subseteq \dots \subseteq Y_1 \subseteq X$ и $\forall i \in 1, \dots, k, \forall r^i \in R_i \quad P_i(r^i) = \{r^{i-1}\} \subseteq R_{i-1}$, $W_i(r^i) \subseteq W_{i-1}(\{r^{i-1}\})$ и $\{r^{i-1}\}$ образуют связную часть в гиперграфе WS_{i-1} .

1.2. Инцидентность. Смежность. Очевидно, что отображения P, F, W вместе с обратными отображениями являются отношениями инцидентности в соответствующих гиперграфах PS, FS, WS и, следовательно, они определяют инцидентность элементов в абстрактной гиперсети S .

Фундаментальным понятием в теории гиперсетей является отношение слабой инцидентности. Два элемента из различных множеств слабо инцидентны, если найдется элемент из третьего множества, инцидентный им обоим. Например, вершина $x \in X$ слабо инцидентна ребру $r \in R$ (т. е. $x \in W^*(r)$), если только существует ветвь $v \in V$ такая, что $x \in P(v)$ и $v \in F(r)$, т. е. $x \in P(F(r))$.

Ясно, что слабо инцидентные элементы могут оказаться инцидентными. Поэтому в некоторых случаях необходимо рассматривать понятие строгой слабой инцидентности, т. е. такие слабо инцидентные элементы, которые не могут быть инцидентными.

Для элементов абстрактных гиперсетей можно определить шесть понятий смежности и столько же — слабой смежности. Действительно, по аналогии с графами и гиперграфами два элемента из одного множества смежны тогда и только тогда, когда найдется элемент из другого множества, инцидентный им обоим. Но так как в абстрактных гиперсетях для пары элементов из любого множества можно найти инцидентные элементы из двух различных множеств, то в этом случае для конкретных элементов имеют место соответственно два понятия смежности. Например, вершины x и y из X V -смежны, если $\exists v \in V: x \in P(v)$ и $y \in P(v)$, и R -смежны, если $\exists r \in R: x \in W(r)$ и $y \in W(r)$. Аналогично определяются смежность других элементов S и слабая смежность этих элементов. Степень (слабая степень) элементов из S равна числу смежных (слабо смежных) ему элементов, т. е. для каждого элемента имеем четыре определения его степени.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ГИПЕРСЕТЕЙ

2.1. Из определений непосредственно следует, что абстрактная гиперсеть обобщает такие математические объекты, как ультраграфы [1], гиперграфы [1], гиперсхемы [2] (по зарубежным публикациям — гиперсети [3]), графы [4], графы связей [5] и т. п. Вводя различные ограничения на множества X , V , R и отображения P , F , W , можно получить различные классы гиперсетей и перечисленные математические модели связности.

Характерной особенностью гиперсетей является то, что рассматриваются три независимых множества элементов и отношения инцидентности между ними. Поэтому при классификации гиперсетей разумным подходом будет рассмотрение подклассов, иницируемых только ограничениями на P , F , W и типом связанной части гиперграфа PS при отображении $F: R \rightarrow 2_{PS}^V$. Иерархические гиперсети не рассматриваются.

2.2. Если предположить, что первичная $PS = (X, V; P)$ и вторичная $WS = (X, R; W)$ сети абстрактной гиперсети S являются графами, а связные части 2_{PS}^V — всевозможными маршрутами в PS , то имеет место обычное определение гиперсети [6]. Когда маршрут есть цепь в PS , то гиперсеть называется обыкновенной, в случае простой цепи имеем простую гиперсеть. Основное внимание в данной работе уделено простым гиперсетям.

2.3. В определении абстрактной гиперсети рассматриваются два понятия: слабая инцидентность и инцидентность. Таким образом, вводя ограничения на соответствующие отношения, будем получать различные классы абстрактных гиперсетей. Например,

пусть отображение $P: V \rightarrow 2^X$ двузначно, тогда первичная сеть PS абстрактной гиперсети является графом. Этот факт будем обозначать $\{X \rightarrow V\}$, т. е. любому элементу $v \in V$ инцидентны не более чем две вершины $x, y \in X$. В том случае, когда накладывается ограничение на слабую инцидентность двух элементов, $\{R > X\}$ означает, что любой вершине $x \in X$ слабо инцидентно не более двух ребер, причем здесь рассматривается строгая слабая инцидентность (см. п. 1.2).

2.4. Число инцидентных или слабо инцидентных элементов для заданного элемента из другого множества — основной параметр классификации абстрактных гиперсетей. Обозначим скобками гиперсеть, в которой соответствующий элемент имеет не более чем один инцидентный (слабо инцидентный) элемент. Фигурные скобки обозначают инцидентность двум элементам, а $\{ \}^k$ — инцидентность k элементам ($k \geq 3$). Например, в $(R \rightarrow V)$ -гиперсети каждой ветви $v \in V$ инцидентно не более чем одно ребро $r \in R$. Классификация гиперсетей завершена, если для каждой упорядоченной пары множеств из X, V, R определены численные ограничения на отношения инцидентности (слабой инцидентности) и тип связной структуры в первичной сети $PS = (X, V; P)$ при отображении F (см. п. 2.2).

Легко заметить, что некоторые классы абстрактных гиперсетей включают в себя другие классы (например, $(R > |X|)$ -гиперсеть простая, а $(R > V)$ -гиперсеть обыкновенная; обратное неверно) или абстрактная гиперсеть может принадлежать различным классам. Некоторые классы могут иметь пустое пересечение. Из сказанного следует, что система классов абстрактных гиперсетей имеет нетривиальную структуру, установить зависимость между классами в некоторых случаях сложно.

2.5. Так как в коммуникационных сетях, моделируемых абстрактными гиперсетями, первичная сеть в основном является графом, то исследование характеристик связности будет осуществляться только для гиперсетей (вторичная сеть может быть гиперграфом). В п. 2.2 перечислены некоторые типы связных частей в 2_{PS}^V . Необходимо добавить такие важные структуры, как деревья (T -гиперсети), циклы (C -гиперсети) и k -полюскики (H -гиперсети). В последнем случае в 2_{PS}^V рассматриваются всевозможные части графа $PS = (X, V; P)$ с выделенными k вершинами (например, подграф с заданной связностью между парами заданных вершин).

3. МАРШРУТЫ И МЕТРИКА В ГИПЕРСЕТЯХ

Понятие «маршруты» играет фундаментальную роль в анализе связности гиперсетей и исследовании их метрических свойств. То что маршруты в гиперсетях задаются по-разному, способствует расширению изобразительных и операционных

средств теории гиперсетей. В этом разделе решены некоторые задачи, связанные с поиском маршрутов в гиперсетях.

3.1. Маршрутом в гиперсети $S = (X, V, R)$ называется конечная последовательность $\mu = (x_1, r_1, x_2, \dots, x_{k-1}, r_{k-1}, x_k)$, составленная из элементов X, R таким образом, что вершины и ребра чередуются, а всякие два соседних элемента инцидентны. Квазимаршрут в гиперсети $S = (X, V, R)$ — это конечная последовательность μ , в которой пара соседних элементов x_i, r_i инцидентна, а r_i, x_{i+1} слабо инцидентна. Если в определении маршрута заменить «инцидентность» на «слабую инцидентность», то получим определение слабого маршрута. Ориентированные маршруты определяются аналогично, с учетом ориентации ребер.

3.2. Рангом $v(\mu)$ маршрута μ (квазимаршрута, слабого маршрута) называется число ребер (или их частей), принадлежащих этому маршруту. Отдаленность (квазиотдаленность, слабая отдаленность) между вершинами $x, y \in X$ численно равна рангу кратчайшего маршрута (квазимаршрута, слабого маршрута), соединяющего эти вершины, и обозначается через $v(x, y)$ ($\bar{v}(x, y)$, $\underline{v}(x, y)$). Отдаленность и слабая отдаленность удовлетворяют аксиомам метрики, квазиотдаленность — аксиомам орметрики.

Длиной ребра (или его части) называется число ветвей, инцидентных этому ребру (части ребра). Длина $\rho(\mu)$ маршрута μ (квазимаршрута, слабого маршрута) равна суммарной длине ребер (их частей), входящих в маршрут μ . Расстояние (квазирасстояние, слабое расстояние) между вершинами $x, y \in X$ в гиперсети S равно длине кратчайшего маршрута (квазимаршрута, слабого маршрута), соединяющего эти вершины, и обозначается через $\rho(x, y)$ ($\bar{\rho}(x, y)$, $\underline{\rho}(x, y)$). Расстояние и слабое расстояние удовлетворяют аксиомам метрики, квазирасстояние — аксиомам орметрики. Аналогично определяются эти понятия для ориентированных гиперсетей.

Рассмотрим теперь методы сводимости задач поиска кратчайших маршрутов в гиперсетях к аналогичным задачам на графах и гиперграфах.

3.3. Кратчайшие маршруты. Из определения маршрута в гиперсети $S = (X, V, R)$ непосредственно следует, что каждому маршруту μ в S между вершинами x и y соответствует маршрут μ в графе $WS = (X, R)$.

Теорема 1. Пусть $S = (X, V, R)$ — простая гиперсеть, заданная матрицами M^{xv} , M^{xr} и M^{rv} . Тогда (i, j) -й элемент матрицы A^p равен числу маршрутов ранга p из x_i в x_j , где

$$A = M^{xr} \odot M^{rx}, \text{ а } M^{rx} = (M^{rx})^T.$$

Следствие. Если S — связная гиперсеть, то $v(x_i, x_j)$, $i \neq j$, равно наименьшему из целых чисел p , для которых (i, j) -й элемент матрицы A^p отличен от нуля.

Доказательства теоремы 1 и следствия следуют из [7] и определений. Для ориентированных маршрутов можно доказать аналогичные утверждения.

Расстояние $\rho(x_i, x_j)$ между парой вершин x_i и x_j в гиперсети S находится по взвешенному графу $WS^* = (X, R)$. Каждому ребру r_k графа WS^* ставится в соответствие длина, равная $\{|v_i|\}$, где $\{v_i\} = F(r_k)$. Таким образом, кратчайшие маршруты в гиперсетях можно найти с помощью известных алгоритмов по графу WS^* . Для ориентированной гиперсети граф WS^* ориентируется.

3.4. Кратчайшие квазимаршруты. Отношения квазиотдаленности и квазирасстояния несимметричны для неориентированных гиперсетей, тем более для ориентированных. Рассмотрим способы вычисления кратчайших квазимаршрутов между различными упорядоченными парами вершин $x_i, x_j \in X$.

Теорема 2. Пусть $S = (X, V, R)$ — простая гиперсеть, заданная матрицами M^{xv} , M^{xr} и M^{rv} . Тогда (i, j) -й элемент матрицы B^p равен числу квазимаршрутов ранга p из x_i в x_j , где $B = M^{xr} \odot M^{rv} \odot M^{vx}$.

Следствие. Если S — связная гиперсеть, то $\bar{v}(x_i, x_j)$, $i \neq j$, равно наименьшему из целых чисел p , для которых (i, j) -й элемент матрицы B^p отличен от нуля.

Доказательства теоремы 2 и следствия следуют из того факта, что матрица B является матрицей смежности некоторого ориентированного графа $BS = (X, U)$, в котором из вершины x_i идет дуга $u \in U$ в вершину x_j , если и только если в гиперсети S существует ребро r_h , инцидентное вершине x_i и слабо инцидентное x_j .

Для ориентированных гиперсетей также можно вычислить квазиотдаленность, если построить ориентированный граф $\vec{BS} = (X, E)$, в котором из x_i идет дуга $e \in E$ в вершину x_j , если и только если в гиперсети S существует ориентированное ребро r_h , исходящее из x_i и слабо инцидентное x_j . Для матрицы смежности \vec{B} графа \vec{BS} справедливы теорема 2 и следствие этой теоремы.

Квазиотдаленность $\bar{v}(x_i, x_j)$ между парой вершин $x_i, x_j \in X$ можно найти с помощью ультраграфа $US = (X, R; f, g)$, который строится по гиперсети S . Каждой вершине (ребру) гиперсети S ставится в соответствие вершина (ребро) ультраграфа $US = (X, R; f, g)$. Отображения $f: X \rightarrow R$ и $g: R \rightarrow X$ для US определяются следующим образом:

$\forall x_i \in X \quad r_j \in f(x_i)$ тогда и только тогда, когда вершина x_i инцидентна ребру r_j в гиперсети S ;

$\forall r_j \in R \quad x_i \in g(r_j)$ тогда и только тогда, когда вершина x_i слабо инцидентна ребру r_j .

Нетрудно показать, что $\bar{v}(x_i, x_j)$ в гиперсети S равно длине кратчайшего сильного маршрута в ультраграфе US между соответствующими вершинами.

Ориентированной гиперсети, очевидно, ставится в соответствие ориентированный ультраграф $\vec{US} = (X, R; f, g)$, в котором

$\forall x_i \in X \ r_j \in f(x_i)$ тогда и только тогда, когда ориентированное ребро $r_j \in S$ выходит из вершины $x_i \in S$;

$\forall r_j \in R \ x_i \in g(r_j)$ тогда и только тогда, когда вершина x_i слабо инцидентна ребру r_j и $r_j \in f(x_i)$.

Очевидно, что между парой вершин $x_i, x_j \in S$ существует кратчайший ориентированный квазимаршрут тогда и только тогда, когда существует кратчайший сильный маршрут между соответствующими вершинами в ориентированном ультраграфе \vec{US} .

Квазирасстояние $\bar{\rho}(x_i, x_j)$ между парой вершин x_i и x_j гиперсети S можно найти по взвешенному орграфу $BS^* = (X, U)$, в котором длина дуги u равна числу ветвей в части ребра r_k , соединяющего вершины x_i и x_j в гиперсети S , т. е. числу элементов в соответствующей части кортежа $F(r_k) = \{x_i, \dots, x_j; \dots\}$. Для ориентированных гиперсетей квазирасстояние от вершины x_i к вершине x_j находится с помощью взвешенного орграфа $\vec{BS} = (X, E)$, в котором длины дуг определяются аналогично.

Заметим, что вычисление кратчайших квазимаршрутов с помощью специально построенных графов и ультраграфов не накладывает ограничений на класс гиперсетей.

3.5. Кратчайшие слабые маршруты. Отношения слабой удаленности и слабого расстояния играют большую роль при решении прикладных задач на гиперсетях. Так же как и в предыдущих случаях, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $S = (X, V, R)$ — простая гиперсеть, заданная матрицами M^{xv} , M^{xr} и M^{rv} . Тогда (i, j) -й элемент матрицы D^p равен числу слабых маршрутов ранга p из x_i в x_j , где $D = M^{xv} \odot \odot M^{vr} \odot M^{rv} \odot M^{xx}$.

Следствие. Если S — связная гиперсеть, то $\tilde{v}(x_i, x_j)$, $i \neq j$, равно наименьшему из целых чисел p , для которых (i, j) -й элемент матрицы D^p отличен от нуля.

Доказательства теоремы 3 и следствия вытекают из свойств графа $DS = (X, U)$, соответствующего матрице смежности D .

Множество вершин графа DS совпадает с множеством вершин гиперсети S и x_i смежна с x_j в DS , если и только если в гиперсети S найдется ребро r_k , слабо инцидентное x_i и x_j . В графе DS любому маршруту взаимно однозначно соответствует слабый маршрут в гиперсети S . Матрице D соответствует также гиперграф $HS = (X, R)$, который задается матрицей инциденций $N^{xr} = M^{xv} \odot \odot M^{vr}$, следовательно, кратчайшие слабые маршруты в гиперсети можно находить по гиперграфу HS . Кроме того, слабые маршруты в ультраграфе US соответствуют таковым в S .

Если гиперсеть S ориентированная, то ей можно поставить в соответствие орграф $\vec{DS} = (X, \vec{U})$, $|\vec{U}| = |U|$. Из вершины x_i идет дуга u в вершину x_j , если и только если существует ребро $r_k \in S$, слабо инцидентное x_i и x_j и ориентированное от x_i к x_j . Любому ориентированному маршруту в \vec{DS} взаимно однозначно соответствует ориентированный слабый маршрут в S .

Слабое расстояние $\tilde{\rho}(x_i, x_j)$ в гиперсетях (ориентированных гиперсетях) между вершинами x_i и x_j вычисляется с помощью взвешенного графа $DS^* = (X, U)$ ($\vec{DS}^* = (X, \vec{U})$), в котором ребру (дуге) u ставится в соответствие длина, равная числу ветвей в части ребра r_k , соединяющего вершины x_i и x_j в гиперсети S , т. е. числу элементов в соответствующей части кортежа $\vec{F}(r_k) = \{\dots, x_i, \dots, x_j, \dots\}$.

3.6. О поиске цепей в гиперсетях. Маршрут μ в гиперсети $S = (X, V, R)$ называется g -цепью, если каждое ребро используется не более одного раза, и v -цепью, если каждая ветвь используется не более одного раза. Отсюда следует, что всякая v -цепь одновременно является g -цепью. Обратное неверно. Маршрут μ называется простой цепью, если в нем все вершины различны.

Лемма 1. *Всякий маршрут (квазимаршрут, слабый маршрут) гиперсети S содержит g -цепь (g -квазицепь, слабую g -цепь), соединяющую ту же пару вершин.*

Теорема 4 [8]. *Всякий кратчайший маршрут (квазимаршрут, слабый маршрут) между двумя вершинами гиперсети S является g -цепью (g -квазицепью, слабой g -цепью).*

Следствие. *Задачи поиска g -цепей (g -квазицепей, слабых g -цепей) между двумя вершинами в гиперсети S полиномиально вычислимы.*

Легко показать, что задачи поиска слабой простой цепи и слабой v -цепи эквивалентны соответственно задачам поиска простой цепи и цепи в графе PS .

ПЦ: пусть задана гиперсеть $S = (X, V, R)$ и пара выделенных вершин $s, t \in X$. Существует ли простая цепь между вершинами s и t в гиперсети S ?

Теорема 5 [8]. *Задача ПЦ является NP-полной.*

Следствие. *Задача поиска простой квазицепи в гиперсети S между вершинами s и t является NP-полной.*

ВЦ: пусть задана гиперсеть $S = (X, V, R)$ и пара выделенных вершин $s, t \in X$. Существует ли v -цепь между вершинами s и t в гиперсети S ?

Теорема 6 [8]. *Задача ВЦ является NP-полной.*

Следствие. *Задача поиска v -квазицепи в гиперсети S между вершинами s и t является NP-полной.*

Для ориентированных гиперсетей справедливы аналогичные результаты.

4. НЕЗАВИСИМОСТЬ И СОЕДИНИМОСТЬ

4.1. Два маршрута, соединяющих пару вершин $x, y \in X$, называются внутренне независимыми (внешне независимыми), если не существует вершины $z \neq x, y$, инцидентной (строго слабо инцидентной) ребрам этих маршрутов. Маршруты называются независимыми, если они одновременно внутренне и внешне неза-

Т а б л и ц а 1. Классификация задач вычисления k -соединимости в гиперсетях

Подклассы задач вычисления k -соединимости	Маршруты	Квазимаршруты	Слабые маршруты
Соединимость	NP -полная	NP -полная	P
Внутренняя соединимость	P	P	P
Внешняя соединимость	NP -полная	NP -полная	P
V -соединимость	NP -полная	NP -полная	P
R -соединимость	P	P	P
Частичная R -соединимость	—	P	P

висимы. Два маршрута, соединяющих пару вершин, V -независимы (R -независимы), если не существует ветви (ребра), принадлежащей обоим маршрутам.

Аналогичным образом определяется независимость для квази- и слабых маршрутов. Поскольку в них отдельные ребра включены частично, имеет смысл ввести еще одно определение независимости этих маршрутов. Два квазимаршрута (слабых маршрута) частично R -независимы, если не существует участка ребра (части ребра, инцидентной одной ветви), принадлежащего обоим квазимаршрутам (слабым маршрутам).

4.2. Две вершины $x, y \in X$ в гиперсети S k -соединимы (k -квазисоединимы, слабо k -соединимы), если эти вершины соединены k -независимыми по вершинам маршрутами (квазимаршрутами, слабыми маршрутами). Аналогично определяются внутренняя и внешняя k -соединимость, k — V -соединимость и k — R -соединимость (маршруты должны быть соответственно внутренние, внешне независимы по вершинам, независимы по ветвям или ребрам).

Для квазимаршрутов и слабых маршрутов k -квазисоединимость и слабая k -соединимость по ветвям и ребрам определяются так же, как и в предыдущем случае, а частичная k -квазисоединимость и слабая k -соединимость по ребрам определяются следующим образом. Две вершины $x, y \in X$ в гиперсети $S = (X, V, R)$ k — R -квазисоединимы (слабо k — R -соединимы), если эти вершины соединены k частично R -независимыми по ребрам квазимаршрутами (слабыми маршрутами).

4.3. Из определения соединимости непосредственно следует существование 17 задач вычисления k -соединимости пары вершин в гиперсети S . В табл. 1 приведена классификация задач поиска k -независимых (x, y) -маршрутов в смысле их принадлежности к полиномиально-вычислимым или NP -полным задачам.

4.4. В работе [9] показано, что задачи вычисления k -соединимости и k — V -соединимости пары вершин в произвольной гиперсети $S = (X, V, R)$ являются NP -полными. Покажем, что остальные принадлежат классам (по сложности вычисления), указанным

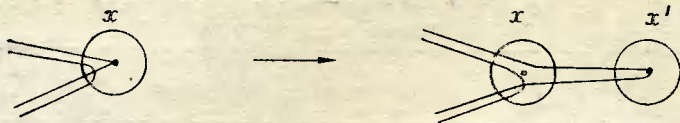


Рис. 1. Выделение инцидентной вершины.

в табл. 1. Попутно отметим, что задача вычисления частичной $k-R$ -соединимости для маршрутов не имеет смысла, так как в маршруте каждое ребро полностью ему принадлежит.

Из определения внутренней k -соединимости следует независимость соответствующих маршрутов на первичной сети $PS = (X, V)$ гиперсети $S = (X, V, R)$, т. е. задача вычисления внутренней k -соединимости принадлежит классу P . NP -полная задача вычисления k -соединимости тривиально сводится к задаче вычисления внешней k -соединимости пары вершин в гиперсети S . Действительно, по гиперсети $S = (X, V, R)$ построим гиперсеть $S' = (X' \cup X, V' \cup V, R)$, применив к каждой вершине $x \in X$ операцию выделения инцидентной вершины (см. рис. 1).

Легко увидеть, что любым k -независимым (s, t) -маршрутам в гиперсети S соответствуют внешне k -независимые (s, t) -маршруты, и наоборот. Поскольку задача поиска внешне k -независимых маршрутов принадлежит классу NP , тем самым доказана NP -полнота указанной задачи. Очевидно, что задача вычисления $k-R$ -соединимости полиномиально вычислима, так как непосредственно сводится к задаче поиска k -независимых по ребрам (s, t) -маршрутов во вторичной сети $WS = (X, R)$.

4.5. Для квазимаршрутов имеют место следующие результаты.

Задача $XK(VK)$. Пусть заданы гиперсеть $S = (X, V, R)$, пара вершин $x, y \in X$ и целое положительное число k . Верно ли, что вершины x и y k -квазисоединимы ($k-V$ -квазисоединимы)?

Теорема 7. Задачи XK и VK являются NP -полными.

Доказательство. Очевидно, что задачи XK и VK принадлежат классу NP . Осталось показать, что NP -полная задача полиномиально сводима к задаче XK (для задачи VK доказательство строится аналогично).

Пусть заданы гиперсеть $S = (X, V, R)$ и пара вершин $x, y \in X$. Преобразуем гиперсеть $S = (X, V, R)$ в $S' = (X', V', R)$ следующим образом. К каждой ветви $v = (a, b) \in V$ добавим две инцидентные вершины a' и b' , и каждую из вершин a и b разобьем на две a^+, a^- ; b^+, b^- (рис. 2) так, чтобы ребра, инцидентные вершинам a и b , стали инцидентными a^+ и b^+ , а ребра, слабо инцидентные a и b , оказались слабо инцидентными a^- и b^- .

В полученной гиперсети $S' = (X', V', R)$ каждому квазимаршруту в точности соответствует один маршрут в S , и наоборот. Действительно, в гиперсети S' содержится только два типа вершин: (a^-, a', b^-, b') слабо инцидентны ребрам, (a^+, b^+) инцидентны ребрам. Поэтому других квазимаршрутов (кроме совпадающих с маршрутами) в этой гиперсети нет.

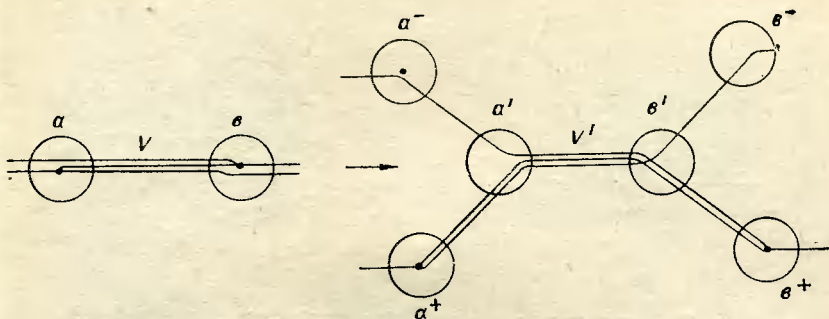


Рис. 2. Подразбиение вершины на инцидентную и слабо инцидентную.

Таким образом, решив задачу XK , этим решим и NP -полную задачу вычисления k -соединимости вершин в гиперсети S . Аналогично доказывается NP -полнота задачи VK , так как каждой ветви v в гиперсети S сопоставлена в точности одна ветвь v' в гиперсети S' . Теорема доказана.

Теорема 8. Задача вычисления k — R -квазисоединимости пары вершин $x, y \in X$ в гиперсети $S = (X, V, R)$ полиномиально вычислима.

Доказательство. Гиперсети $S = (X, V, R)$ сопоставим ультраграф $US = (X, R; f, g)$ (см. п. 3.4), тогда k -независимым по ребрам квазимаршрутам между вершинами x и y в гиперсети S будут взаимно однозначно соответствовать k -независимые по ребрам сильные маршруты в ультраграфе US . Но задача k -соединимости по ребрам в ультраграфе полиномиально вычислима. Теорема доказана.

Теорема 9. Задача вычисления частичной k — R -квазисоединимости пары вершин в гиперсети $S = (X, V, R)$ полиномиально вычислима.

Доказательство. Гиперсети $S = (X, V, R)$ сопоставим смешанный граф $G = (X \cup Y, E)$, полученный из данной гиперсети по следующему правилу. К каждой вершине $x \in X$ добавляются y_1, \dots, y_{k_x} , где k_x — слабая R -степень вершины x . Каждая вершина y_i подразбивает соответствующее ребро, слабо инцидентное x . От y_i к вершине x добавляются две дуги (y_i, x) . Пример такого преобразования показан на рис. 3. Легко показать, что любому квазимаршруту в гиперсети $S = (X, V, R)$ взаимно однозначно соответствует ориентированный маршрут в смешанном графе $G = (X \cup Y, E)$ между вершинами из множества X . Но в смешанном графе задача поиска k -независимых по ребрам и дугам маршрутов между парами вершин полиномиально вычислима. Теорема доказана.

Используя преобразование гиперсети S , изложенное в доказательстве теоремы 9, легко показать, что задача поиска внутренне k -независимых (s, t) -квазимаршрутов полиномиально вычислима.

В п. 4.4 гиперсеть S' , построенная для доказательства NP -полноты задачи внешней k -соединимости, может быть использо-

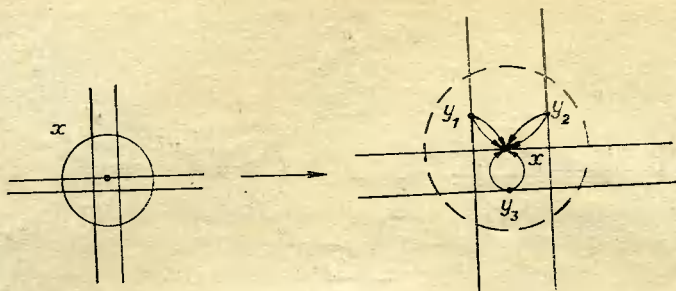


Рис. 3. Локальное преобразование гиперсети в смешанный граф.

вана для доказательства NP -полноты задачи внешней k -квазисоединимости. Действительно, в гиперсети S' каждый квазимаршрут является маршрутом, и наоборот.

Теперь перейдем к рассмотрению слабых маршрутов и соответствующих задач соединимости.

4.6. Для слабых маршрутов справедливы следующие теоремы.

Теорема 10. *Задачи вычисления слабой k -соединимости и слабой k - V -соединимости пары вершин $x, y \in X$ в гиперсети $S = (X, V, R)$ полиномиально вычислимы.*

Доказательство. Из определения слабых маршрутов ясно, что любому из них в гиперсети однозначно соответствует маршрут в первичной сети $PS' = (X, V')$, которая получается из PS удалением ветвей, которым не инцидентно ни одно ребро. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Теорема 11. *Задача вычисления слабой k - R -соединимости пары вершин $x, y \in X$ в гиперсети $S = (X, V, R)$ полиномиально вычислима.*

Доказательство. Из определения слабой k - R -соединимости следует, что любое ребро $r \in R$ входит в слабые маршруты не более одного раза. Поэтому гиперсети $S = (X, V, R)$ сопоставили гиперграф $HS = (X, R)$ (см. п. 3.5), в котором любым k -независимым по ребрам (x, y) -маршрутам в точности соответствуют k -независимые по ребрам (x, y) -маршруты в гиперсети S . Так как задача k -соединимости по ребрам в любом гиперграфе полиномиально вычислима, то из вышесказанного следует доказательство теоремы.

Теорема 12. *Задача вычисления частичной слабой k - R -соединимости пары вершин $x, y \in X$ в гиперсети $S = (X, V, R)$ полиномиально вычислима.*

Доказательство. Так как в частично R -независимых слабых маршрутах любое ребро может по частям войти в различные слабые маршруты, то для доказательства теоремы достаточно построить такой граф $L = (X, E)$, в котором любому маршруту взаимно однозначно соответствует слабый маршрут в гиперсети S . Такой граф легко строится по гиперсети $S = (X, V, R)$ сле-

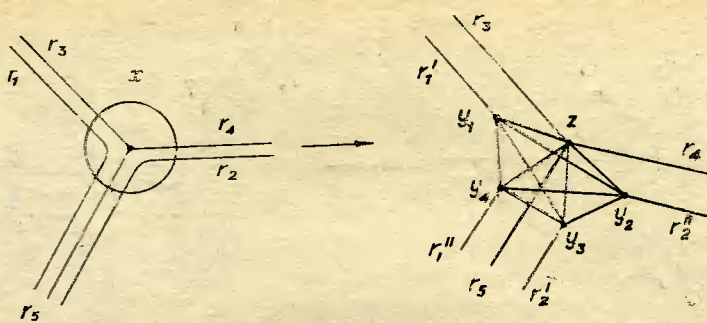


Рис. 4. Преобразование вершин гиперсети в клики слабой инцидентности.

дующим образом. Все слабо инцидентные вершины для любого ребра сделать инцидентными, в полученной гиперсети S^* рассмотреть вторичную сеть $WS^* = (X, E)$ и отождествить граф L с вторичной сетью WS^* . Очевидно, что L является мультиграфом и k -соединимость по ребрам между вершинами $x, y \in X$ в L равна частичной $k - R$ -соединимости этой пары вершин в гиперсети S . Теорема доказана.

Теорема 13. *Задача вычисления слабой внутренней k -соединимости пары вершин $x, y \in X$ в гиперсети $S = (X, V, R)$ полиномиально вычислима.*

Доказательство. Преобразуем гиперсеть $S = (X, V, R)$ в граф $G(S) = (X \cup X', E)$ по следующему правилу. Каждой вершине $x \in X$ сопоставим $2\sigma_R(x) + 1$ вершин $Y(x)$, где $\sigma_R(x)$ — слабая R -степень вершины x . На множестве $Y(x)$ строится полный граф. Все ребра, инцидентные вершине $x \in X$, остаются инцидентными одной и той же вершине $z \in Y(x)$. Ребра гиперсети, слабо инцидентные x , подразбиваются парой смежных вершин из $Y(x)$. Пример такой операции приведен на рис. 4. В построенном графе $G(S)$ между любой парой вершин z_i и z_j любому множеству непересекающихся цепей взаимно однозначно соответствует множество слабых внутренне независимых маршрутов между соответствующими вершинами в гиперсети S . Следовательно, по графу $G(S)$ за полиномиальное время можно вычислить слабую внутреннюю k -соединимость пары вершин в гиперсети S . Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается полиномиальная вычислимость задачи поиска слабой внешней k -соединимости пары вершин в гиперсети S . В этом случае гиперсеть S преобразуется в граф $L(S)$ с помощью операции, показанной на рис. 5.

4.7. Некоторые NP -полные задачи поиска k -соединимости пары вершин в гиперсети S можно решить за полиномиальное время на важных и нетривиальных классах гиперсетей. Рассмотрим $(R > |X|)$ -гиперсети, в которых каждой вершине строго слабо инцидентно не более одного ребра. Тогда для таких гиперсетей справедлива следующая теорема.

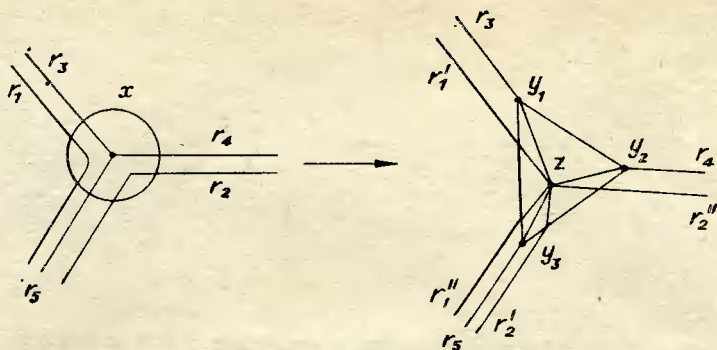


Рис. 5. Преобразование вершин гиперсети в клики инциденции.

Теорема 14. В $(R > X)$ -гиперсетях задача поиска внешней k -соединимости (k -квазисоединимости) пары вершин полиномиально вычислима.

Доказательство. Так как каждой вершине $x \in X$ слабо инцидентно не более одного ребра, то любые независимые по ребрам (s, t) -маршруты будут также внешне независимы и, следовательно, для решения задачи можно воспользоваться графом вторичной сети WS гиперсети S . В случае квазимаршрутов по гиперсети S можно построить смешанный граф G (теорема 9) и тогда любым непересекающимся по ребрам (s, t) -цепям в G взаимно однозначно соответствуют внешне независимые (s, t) -маршруты в гиперсети S . Теорема доказана.

Можно предположить, что для $(R > X)$ -гиперсетей задачи поиска k -соединимости и k -квазисоединимости также полиномиально вычислимы. Используя преобразования гиперсети S , приведенные в теореме 14, легко можно показать, что задачи вычисления $k - V$ -соединимости и $k - V$ -квазисоединимости пары вершин в $(R \rightarrow V)$ -гиперсети S решаются за полиномиальное время.

5. ОТДЕЛИМОСТЬ И СВЯЗНОСТЬ ГИПЕРСЕТЕЙ

Связность любой структурной модели определяется, с одной стороны, способом достижимости вершин (т. е. типом маршрута), а с другой — типом и характером удаления элементов из структурной модели.

5.1. Гиперсеть называется связной, если и только если между любой парой вершин гиперсети S существует соединяющий их маршрут. Отсюда следует, что графы PS и WS связны. Гиперсеть называется односторонне квазисвязной, если и только если любая пара вершин из S соединима хотя бы одним квазимаршрутом. Гиперсеть квазисвязна, если и только если для любых вершин $x, y \in X$ существуют квазимаршруты $\mu(x, y)$ и $\mu(y, x)$. Гиперсеть называется слабо связной, если и только если любая пара вершин S соединима слабым маршрутом.

Рассмотренные отношения связности упорядочиваются по включению, т. е. из связности \rightarrow квазисвязность \rightarrow слабая связность. Обратное неверно.

Гиперсеть S называется насыщенной, если гиперграф FS связан, и ненасыщенной — в противном случае. Гиперсеть S называется полносвязной, если и только если связны графы PS , WS и гиперграф FS . Очевидно, что несвязность S влечет несвязность WS .

5.2. Понятия k -отделимости в гиперсетях связаны со способом удаления элементов. Разумеется, можно ввести различные способы удаления элементов. Здесь рассмотрим лишь те, которые отражают возможные преобразования структур технических систем, моделируемых гиперсетями.

1. Удаление ребер. Удаляются ребра в гиперсети $S = (X, V, R)$ без инцидентных вершин и ветвей.

2. Частичное удаление ребер заключается в удалении части ребра, инцидентной некоторой ветви. При этом ребро разделяется по крайней мере на две части.

3. Удаление ветвей. Удаляются ветви с инцидентными ребрами без инцидентных вершин.

4. Частичное удаление ветвей определяется аналогично, но ребра удаляются частично.

5. Внешнее удаление вершин. Удаляются ребра, слабо инцидентные данным вершинам.

6. Внутреннее удаление вершин. Удаляются ребра, инцидентные данным вершинам.

7. Удаление вершин. Удаляются вершины вместе с инцидентными ветвями (ребра, инцидентные удаленным ветвям, также удаляются).

Из введенных способов удаления вершин можно рассмотреть частичное; остановимся на одном способе удаления.

8. Частичное удаление вершины. Определяется аналогично предыдущему способу, но ребра, инцидентные удаляемым ветвям, удаляются частично.

5.3. Теперь можно привести возможные определения k -отделимости пары вершин в гиперсети $S = (X, V, R)$. Две вершины $x, y \in X$ в гиперсети $S = (X, V, R)$ $k_R(l_R, m_R)$ -отделимы (квази-, слабо отделимы), если $k_R(l_R, m_R)$ — наименьшее число ребер, удаление которых (для других способов удаления элементов определения отделимости аналогичны) приводит к разрушению всех маршрутов (квази-, слабых маршрутов) между вершинами x и y в гиперсети S . Таким образом, даны определения 24 понятий отделимости пары вершин.

k -связность гиперсетей определяется через приведенные понятия отделимости.

Пример. Гиперсеть $S = (X, V, R)$ k_X -связна, если k_X принимает наименьшее значение из k_X -отделимости всех пар вершин гиперсети S .

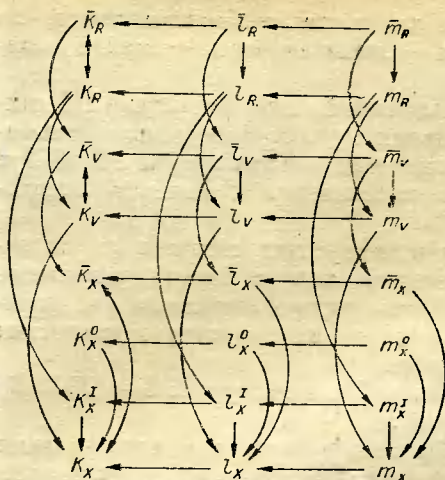


Рис. 6. Граф частичной упорядоченности характеристик связности.

гиперсети $S = (X, V, R)$ удалено некоторое множество вершин X' (а следовательно, и инцидентные им ветви V' и ребра R'), т. е. $S' = (X - X', V - V', R - R')$.

5.4. Для получения оценок связности гиперсети $S = (X, V, R)$ будут полезны некоторые достаточно очевидные неравенства, частично упорядочивающие численные значения характеристик связности.

Обозначим: $\Theta := k, l, m$, тогда $\Theta_R(S)$ — реберная связность гиперсети S при $\Theta = k$, реберная квазисвязность гиперсети S при $\Theta = l$, реберная слабая связность гиперсети S при $\Theta = m$. Для остальных характеристик связности Θ также принимает три значения. $H := X, V, R$, тогда $k_H(S)$ — связность гиперсети S при $H = X$, связность по ветвям гиперсети S при $H = V$, связность по ребрам при $H = R$. $\sigma = 1, 2, \dots, 8$ — номер способа удаления элементов из гиперсети S (см. п. 5.2). Тогда, например, $l_\sigma(S)$ означает l_V -квазисвязность гиперсети S по ветвям, а $m_\sigma(S)$ — внутреннюю слабую связность гиперсети S . Черта над буквой означает частичную отделимость (см. также табл. 2).

Справедливы следующие неравенства:

$$\forall \sigma = \overline{1,8} \quad m_\sigma(S) \geq l_\sigma(S) \geq k_\sigma(S), \quad (1)$$

$$\forall \Theta = k, l, m \quad \Theta_R(S) \geq \Theta_V(S) \geq \Theta_X(S), \quad (2)$$

$$\overline{\Theta}_R(S) \geq \overline{\Theta}_V(S) \geq \overline{\Theta}_X(S), \quad (3)$$

$$\Theta_X^0(S) \geq \Theta_X(S), \quad (4)$$

$$\Theta_X^I(S) \geq \Theta_X(S), \quad (5)$$

Часть гиперсети S' назовем основной, если из исходной гиперсети $S = (X, V, R)$ удалено некоторое подмножество ребер R' , т. е. $S' = (X, V, R - R')$. Часть гиперсети S' назовем усеченной основной, если из исходной гиперсети $S = (X, V, R)$ удалено некоторое множество ветвей V' (а следовательно, и инцидентные им ребра R'), т. е. $S' = (X, V - V', R - R')$. При внешнем или внутреннем удалении вершин, очевидно, будет получена остоновая гиперсеть. Часть гиперсети S' назовем подгиперсетью (или просто подсетью), если из исходной

$$\Theta_R(S) \geq \Theta_X^I(S), \quad (6)$$

$$\forall H = X, V, R; \Theta = k, l, m \quad \bar{\Theta}_H(S) \geq \Theta_H(S) \\ (\text{при } \Theta = k \text{ имеет место равенство}). \quad (7)$$

На рис. 6 значения характеристик связности гиперсети частично упорядочены согласно приведенным неравенствам.

6. О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОТДЕЛИМОСТИ В ГИПЕРСЕТЯХ

Так же как в случае соединимости пары вершин в гиперсети S , задачи их отделимости имеют различную сложность. Некоторые из этих задач решаются за полиномиальное время, другие принадлежат к классу NP -полных задач. В табл. 2 указаны идентификаторы задач отделимости и их соответствующий класс сложности вычисления.

6.1. Отделимость. Напомним, две вершины $x, y \in X$ в гиперсети S отделимы, если при удалении некоторых элементов гиперсети между вершинами x и y отсутствует маршрут, их соединяющий.

В работе [10] показано, что задача k_R -отделимости решается за полиномиальное время, к этому же классу относится задача внутренней k_X^I -отделимости. Там же показана NP -полнота задач k_V -, k_X^0 -, k_X -отделимости. Действительно, полиномиальность первых двух задач следует из равенств $k_R(S) = \lambda(WS)$, $k_X^I = \omega(WS)$ соответственно, где $\lambda(WS)$ — отделимость по ребрам соответствующей пары вершин в графе вторичной сети WS гиперсети S , а $\omega(WS)$ — отделимость по вершинам этой же пары вершин в WS . Справедливость утверждений (см. табл. 2) о сложности вы-

Т а б л и ц а 2. Классификация задач вычисления k -отделимости в гиперсетях

Удаление элементов	Маршрут		Квазимаршрут		Слабый маршрут	
Ребра	k_R	P	l_R	P	m_R	P
Ребра, частичное	\bar{k}_R	P	\bar{l}_R	P	\bar{m}_R	P
Ветви	k_V	NP -полная	l_V	NP -полная	m_V	NP -полная
Ветви, частичное	\bar{k}_V	NP -полная	\bar{l}_V	NP -полная	\bar{m}_V	P
Вершин, внешнее	k_X^0	NP -полная	l_X^0	NP -полная	m_X^0	NP -полная
Вершин, внутреннее	k_X^I	P	l_X^I	NP -полная	m_X^I	NP -полная
Вершин	k_X	NP -полная	l_X	NP -полная	m_X	NP -полная
Вершин, частичное	\bar{k}_X	NP -полная	\bar{l}_X	NP -полная	\bar{m}_X	P

числения частичной отделимости пары вершин в гиперсети S следует из справедливости равенства (7) для $\Theta = k$.

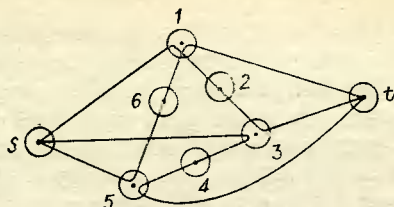
6.2. Квазиотделимость. Задача вычисления l_R -квазиотделимости может быть решена за полиномиальное время. По гиперсети $S = (X, V, R)$ строится ультраграф $US = (X, R; f, g)$ (см. п. 3.4), в этом ультраграфе любому сильному маршруту взаимно однозначно соответствует квазимаршрут в гиперсети $S = (X, V, R)$. Но k -соединимость по ребрам в ультраграфе US равна k -отделимости по ребрам (при слабом удалении ребер). Отсюда следует полиномиальность вычисления l_R -квазиотделимости пары вершин в гиперсети S . Аналогично доказывается полиномиальная вычислимость частичной \bar{l}_R -квазиотделимости, но вместо ультраграфа US рассматривается граф $G = (X \cup Y, E)$ (см. теорему 9).

В работе [10] доказана NP -полнота задач вычисления l_V -, l_X^0 -, l_X^I -, l_X -отделимости пары вершин в гиперсети $S = (X, V, R)$. Аналогично можно доказать NP -полноту задач частичной \bar{l}_V - и \bar{l}_X -квазиотделимости. Действительно, при доказательстве NP -полноты задач l_V - и l_X -квазиотделимости x и y фактически можно было бы рассматривать удаление ребер, хотя и частичное, но разрушающее все квазимаршруты из вершины x в вершину y .

6.3. Слабая отделимость. Для задач слабой m_V -, m_X^0 -, m_X^I -, m_X -отделимости двух вершин в гиперсети $S = (X, V, R)$ их NP -полнота доказана в работе [10]. Там же показано, что задача слабой m_R -отделимости решается за полиномиальное время путем преобразования гиперсети S в гиперграф $HS = (X, R)$ (см. п. 3.5). Легко показать, что задача слабой \bar{m}_R -отделимости также решается за полиномиальное время. Для этой цели достаточно перейти от гиперсети S к графу L (см. п. 4.6, теорема 12). Если рассмотреть первичную сеть $PS = (X, V)$ гиперсети S и удалить из нее ветви, не инцидентные ребрам, то в полученном графе $PS' = (X, V')$ задачи определения реберной λ -отделимости и вершинной ω -отделимости пары вершин $x, y \in X$ эквивалентны задачам слабой \bar{m}_V -отделимости и слабой \bar{m}_X -отделимости соответствующих вершин в гиперсети S . Таким образом, эти задачи также полиномиально вычислимы.

6.4. В теории графов справедливы теоремы менгеровского типа, т. е. численное значение отделимости пары вершин равно численному значению их соединимости. Для гиперсетей это положение не всегда выполняется. Например, на рис. 7 приведена гиперсеть $S = (X, V, R)$, в которой вершины s и t 1-соединимы, но 2-отделимы. Из примера ясно, что квази- и слабая соединимость отличаются от квази- и слабой отделимости. Действительно, s и t слабо 3-соединимы, но слабо 2-отделимы. Легко показать, что для полиномиально вычисляемых задач соединимости и отделимости в гиперсетях теорема Менгера справедлива. Причем при исследовании $\Theta_H(S)$ -отделимости вершин необходимо рассматривать при $H = X$ k -соединимость, при $H = V$ $k - V$ -соединимость, при $H = R$ частичную $k - R$ -соединимость.

Рис. 7. Пример двухполюсной гиперсети.



Покажем, что для NP -полных задач k_V -, k_X^0 -, k_X -отделимости справедливы следующие неравенства:

$$k_V \geq z_V, \quad k_X^0 \geq z_X^0, \quad k_X \geq z_X, \quad (8)$$

где z_V равно k — V -соединимости, z_X^0 — внешней k -соединимости, z_X — k -соединимости. В самом деле, так как при удалении элементов в гиперсети S должны быть разрушены (s, t) -маршруты, а по определению k -соединимости пары вершин элементы маршрутов полностью не пересекаются, то очевидно, что k -отделимость не меньше k -соединимости.

В случае слабой связности пары вершин в гиперсети $S = (X, V, R)$ имеют место обратные неравенства:

$$m_V \leq \tilde{z}_V, \quad m_X^0 \leq \tilde{z}_X^0, \quad m_X^I \leq \tilde{z}_X^I, \quad m_X \leq \tilde{z}_X, \quad (9)$$

где m — слабая отделимость, а \tilde{z} — слабая соединимость одной и той же пары вершин s, t в гиперсети S . Справедливость этих неравенств следует из того факта, что при удалении одного элемента в гиперсети S может быть разрушено несколько независимых слабых (s, t) -маршрутов.

Соотношения квазиотделимости и квазисоединимости почти не исследованы, но легко можно показать, что l_V -, l_X^0 -, l_X -квазиотделимость не оценивается через соответствующую квазисоединимость. Так как слабая соединимость легко вычисляется, то с учетом неравенств (9) и (1) — (7) можно оценивать сверху различные типы отделимости пары вершин в гиперсети S .

6.5. Сложность вычисления большинства задач k -отделимости в гиперсетях не позволяет исследовать характеристики связности гиперсетей большой размерности уже при $k > 3$. Однако для некоторых классов гиперсетей задачи вычисления k -отделимости пары вершин решаются за полиномиальное время.

Теорема 15. Задача вычисления внутренней k -квазиотделимости пары вершин в $(X \rightarrow R)$ -гиперсети $S = (X, V, R)$ полиномиально вычислима.

Доказательство. По $(X \rightarrow R)$ -гиперсети $S = (X, V, R)$ построим ориентированный граф $GS = (X, E)$ следующим образом. Множество вершин орграфа GS совпадает с множеством вершин в S . Пара вершин x и y в GS соединяется дугой (x, y) в GS , если и только если в гиперсети S существует ребро $r \in R$, сильно инцидентное вершине x и слабо инцидентное вершине y .

Так как в $(X \rightarrow R)$ -гиперсети каждому ребру сильно инцидентна не более чем одна вершина, то при внутреннем удалении произвольной вершины x удалению инцидентных ей ребер в S соответствует удаление дуг, исходящих из вершины x в орграфе GS . С другой стороны, любому квазимаршруту в S взаимно однозначно соответствует маршрут в GS между той же парой вершин. Следовательно, разделяющее множество вершин в GS является разделяющим множеством (внутреннее удаление вершин) для тех же квазидостижимых вершин в гиперсети S . Теорема доказана.

Теорема 16. *Задача вычисления k — V -отделимости пары вершин в $(R \rightarrow V)$ -гиперсети $S = (X, V, R)$ полиномиально вычислима.*

Доказательство. В $(R \rightarrow V)$ -гиперсети S каждой ветви инцидентно не более чем одно ребро, поэтому $k_v(S) \geq \lambda(WS)$. С другой стороны, пусть $\lambda(WS)$ — минимальное разделяющее множество ребер вторичной сети $WS = (X, R)$ $(R \rightarrow V)$ -гиперсети $S = (X, V, R)$. Тогда в силу утверждения теоремы каждому ребру r из разделяющего множества R' можно сопоставить единственную инцидентную ему ветвь $v \in V$, удаление которой разрушает данное ребро r . Отсюда следует $\lambda(WS) \geq k_v(S)$. Теорема доказана.

Можно предположить, что задачи вычисления k — V -квазиотделимости и слабой k — V -отделимости пары вершин в $(R \rightarrow V)$ -гиперсети также решаются за полиномиальное время. Например, если $(R \rightarrow V)$ -гиперсеть S одновременно является $\{V \rightarrow R\}$ -гиперсетью, то полиномиальность вычисления k — V -квазиотделимости пары вершин в S можно показать, переходя от гиперсети S к смешанному графу G из п. 4.5.

Теорема 17. *Задача вычисления внешней k -отделимости пары вершин в $(R > X)$ -гиперсети решается за полиномиальное время.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 16 за тем лишь исключением, что разделяющему (внешнее удаление вершины) множеству вершин в S взаимно однозначно соответствует множество разделяющих ребер в графе $\overline{WS} = (X', R')$, который получается из вторичной сети $WS = (X, R)$ гиперсети S отождествлением вершин, инцидентных такому ребру r , для которого не существует слабо инцидентных вершин из X . Очевидно, что в общем случае некоторые вершины вне k -неотделимы при любом k . В этом случае в графе \overline{WS} эти вершины будут отождествлены. Теорема доказана.

Легко показать, что для некоторых тривиальных классов гиперсетей (например, для $(V \rightarrow R)$ -гиперсетей) все задачи вычисления k -отделимости решаются за полиномиальное время. Для других важных классов ($\{R \rightarrow V\}$ - и $\{R \rightarrow X\}$ -гиперсетей) полиномиальные алгоритмы неизвестны. Так как в доказательствах NP -полноты задач k -отделимости фигурируемые там гиперсети

не принадлежат указанным классам, можно предположить, что для этих классов задачи определения связности решаются за полиномиальное время.

7. ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ГИПЕРСЕТЕЙ С ЗАДАННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Эти задачи имеют большое практическое применение. Поэтому, несмотря на NP -полноту большинства задач синтеза гиперсетей, в работе приводятся некоторые эвристические и точные алгоритмы синтеза гиперсетей, удовлетворяющих заданным характеристикам связности. Кроме того, анализируются наиболее общие схемы методов, используемых при составлении различных алгоритмов синтеза.

7.1. Рассмотрим основные параметры задач синтеза.

1°. Исходные данные. В задачах синтеза могут быть заданы: множества вершин X и Y , первичная сеть $PS = (X, V)$, вторичная сеть $WS = (Y, R)$, однозначное отображение $f: Y \rightarrow X$ ($|X| \geq |Y|$). Каждое из приведенных данных может либо присутствовать в постановке задачи, либо отсутствовать. Наличие множеств X и Y обязательно. Кроме того, ветви, ребра и вершины гиперсети могут быть взвешены. Последние данные обычно фигурируют в задачах оптимального синтеза.

2°. Характеристики связности (отделимости) описаны в п. 5. Таким образом, синтезируемая гиперсеть должна обладать заданными значениями одной или нескольких характеристик связности.

3°. Отделимость вершин устанавливается выделенными вершинами или парой вершин.

4°. Значение связности устанавливается максимальное или заданное.

5°. В том случае, когда заданы первичная сеть $PS = (X, V)$ и вторичная $WS = (Y, R)$, для достижения необходимого значения связности синтезируемой гиперсети возможны добавления ребер, ветвей или распараллеливание ребер.

6°. В тех случаях, когда неизвестны первичная или вторичная сети, возможны ограничения на число их ветвей, ребер, диаметр и другие характеристики. Кроме того, в синтезируемой гиперсети могут быть ограничения на число элементов, инцидентных другим элементам гиперсети. Например, число ребер, инцидентных любой ветви, не превосходит заданной величины.

7°. В процессе синтеза гиперсети с заданной связностью часто возникает необходимость в оптимизации значения некоторой целевой функции, в частности, она может отсутствовать. Таким образом, предложенная классификация задач синтеза гиперсетей позволяет сформулировать весь круг проблем, связанных с оптимизацией гиперсетей, удовлетворяющих данным характеристикам связности.

7.2. Для любой задачи синтеза необходим собственный алгоритм, однако можно предложить общие схемы решения поставленных задач, которые могут оказаться полезными при составлении частных алгоритмов. Все методы синтеза оптимальных структур гиперсетей можно подразделить на точные и приближенные. К приближенным методам прибегают в том случае, когда точные методы недостаточно эффективны (не дают решение за приемлемое время).

Точные методы:

1°. Метод ветвей и границ. Применительно к синтезу гиперсетей ветвление можно осуществлять, задавая для каждой ветви v либо $v \in F(R)$, либо $v \notin F(R)$. Такая схема может применяться в тех случаях, когда знание множества $F(R)$ -ветвей, вошедших в оптимальную гиперсеть, позволяет эффективно построить ее самое.

2°. Метод направленного перебора. Суть метода направленного перебора заключается в следующем. Для каждого ребра $r \in R$ фиксируется множество цепей, которые могут фигурировать в оптимальной гиперсети в качестве $F(r)$. После этого осуществляется перебор всех вариантов структур гиперсетей. Применимость метода в значительной степени ограничивается необходимостью хранения в памяти ЭВМ множества допустимых цепей.

3°. Метод сведения задачи к уже известной. В некоторых случаях задачу синтеза оптимальной структуры гиперсети удается свести к уже известной, хорошо исследованной задаче. Ограниченность сферы применения этого метода очевидна.

Приближенные методы:

1°. Метод кратчайшего пути. Для каждого ребра $r \in R$ в качестве $F(r)$ выбирается кратчайший путь в графе PS между концевыми вершинами ребра r .

2°. Метод независимых путей. Если в графе вторичной сети WS имеется k кратных ребер между вершинами x, y и, кроме того, локальная связность вершин x, y в графе первичной сети PS не меньше k , то эти k кратных ребер можно реализовать по k независимым путям. Для того чтобы суммарная длина этих путей была минимальна, необходимо каждой ветви графа PS приписать «пропускную способность», равную длине этой ветви; затем воспользоваться алгоритмом нахождения потока минимальной стоимости [11].

3°. Метод кратчайшего пути с адаптацией. От метода кратчайшего пути он отличается тем, что после нахождения очередной трассы $F(r)$ длины ветвей, входящих в $F(r)$, изменяются по некоторому правилу. Если длины ветвей уменьшаются, то получающаяся гиперсеть имеет тенденцию к «сжатию» (уменьшению числа ветвей, по которым реализованы ребра). Если же длины ветвей увеличиваются, то получающаяся гиперсеть имеет тенденцию к «расширению» (каждое последующее ребро реализуется по пути, который должен иметь как можно меньше общих ветвей с путями реализации предыдущих ребер).

4°. Метод случайного поиска с адаптацией. Каждой ветви первичной сети $PS = (X, V)$ ставится в соответствие некоторая вероятность удаления данной ветви из PS . Разыгрывается t вариантов удаления ветвей из PS согласно заданным вероятностям. В полученных t графах $\{PS_i\}$ производится трассировка ребер WS (например, методом кратчайшего пути). Найденные гиперсети $\{S_i\}$ оцениваются с помощью целевой функции. Ветви PS_i , для которых значение целевой функции наилучшее, поощряются, т. е. вероятность удаления соответствующих ветвей из PS уменьшается, а для ветвей, входящих в PS_i с наихудшим значением целевой функции, она увеличивается. Процедура построения t случайных суграфов PS повторяется до тех пор, пока относительная погрешность не станет меньше заданной величины или процесс не стабилизируется.

5°. Метод гомеоморфного отображения. Сущность метода заключается в том, что отдельные фрагменты WS или вторичная сеть в целом отображаются в PS так, чтобы часть первичной сети PS (ветви этой части инцидентны ребрам WS) была гомеоморфной вторичной сети WS . Если такая трассировка возможна, то $\omega(S) = \omega(WS)$, причем здесь имеется в виду связность вершин, принадлежащих только WS .

6°. Метод замены трасс. Сначала трассировка ребер из WS осуществляется в PS произвольным способом (например, методом кратчайших путей), затем осуществляется перебор по всем ребрам вторичной сети WS , т. е. берется произвольное ребро, соответствующая ему трасса уничтожается и осуществляется новая трассировка с учетом оптимизации целевой функции и заданных ограничений. При такой трассировке можно использовать различные эвристические приемы или точные методы.

7°. Метод локальной оптимизации. Сначала строится некоторое приближенное решение задачи синтеза оптимальной структуры гиперсети. Затем по некоторым правилам перестраиваются отдельные фрагменты гиперсети. Если получающаяся гиперсеть оптимальнее старой, то она берется в качестве текущего приближенного решения и процедура повторяется заново уже по отношению к ней. Процесс прекращается, когда не удастся построить более оптимальную гиперсеть.

8°. Усеченные точные методы. На базе точных методов (метод ветвей и границ, метод направленного перебора) можно строить приближенные методы решения задачи синтеза оптимальной структуры гиперсети, если в точном методе проводить не весь объем вычислений, а некоторую заранее обусловленную его часть. Например, в методе ветвей и границ можно осуществлять ветвления до тех пор, пока наилучшая из построенных гиперсетей не окажется достаточно близкой к оптимальной.

7.3. Об одном алгоритме синтеза оптимальной гиперсети. Перейдем к описанию эвристического алгоритма решения задачи синтеза, дающего неплохие результаты на достаточно широком классе задач. Сформулируем необходимые определения. Пусть

известны графы первичной сети $PS = (X, V)$, вторичной сети $WS = (Y, R)$. Обозначим: $\rho(v)$ или $\rho_{PS}(v)$ — длина ветви $v \in V$, $\rho(r)$ или $\rho_{WS}(r)$ — длина ребра $r \in R$, $\alpha(r)$ — пропускная способность (емкость) ветви $v \in V$, $\alpha(r)$ — емкость ребра $r \in R$, $\omega(S)$ — вершинная связность гиперсети S .

Требуется построить гиперсеть $S = (PS, WS; \Phi)$, для которой выполняются условия

$$\omega(S) \geq k, \quad (10)$$

$$\forall v \in V \quad \sum_{r \in \Phi^{-1}(v)} \alpha(r) \leq \alpha(v) \quad (11)$$

и которая минимизирует функционал $\varphi(S)$ — стоимость гиперсети S .

Относительно вида функционала $\varphi(S)$ не формулируется никаких ограничений, поскольку он явным образом не фигурирует в предлагаемом ниже эвристическом алгоритме. Фактически алгоритм осуществляет поиск некоторого допустимого (удовлетворяющего выше описанным ограничениям) решения. При практическом использовании рекомендуется убедиться в том, что для данного конкретного функционала $\varphi(S)$ алгоритм дает приемлемые результаты.

А л г о р и т м А1:

п. 1. Если $\omega(PS) \geq k$ и $\omega(WS) \geq k$, то на п. 2, иначе на п. 15.

п. 2. Между всеми парами вершин $x, y \in X$ найти максимальные потоки в графах PS и WS , т. е. вычислить $\mu_{PS}(x, y)$ и $\mu_{WS}(x, y)$. Если существует пара вершин $x, y \in X$, для которой $\mu_{PS}(x, y) < \mu_{WS}(x, y)$, то на п. 15, иначе на п. 3.

п. 3. Реализуем ребра графа WS по кратчайшим путям в графе PS . Если выполняется условие (11), то на п. 8, иначе на п. 4.

п. 4. Для всех ветвей v_i вычислить коэффициент $\Delta_i = \sum_{r \in \Phi^{-1}(v_i)} \alpha(r) / \alpha(v_i)$. Если для некоторой ветви v_i $\Delta_i > 1$, то

она называется перенасыщенной.

п. 5. Среди перенасыщенных ветвей выберем ветвь v_j с максимальным значением Δ_j и найдем ребро $r = (x, y) \in \Phi^{-1}(v_j)$ с минимальным значением $\alpha(r)$. Для каждой ветви v_j вычислим значение δ_j по формуле

$$\delta_j = \begin{cases} \Delta_j, & \text{если } v_j \in \Phi(r) \text{ и } \sum_{r' \in \Phi^{-1}(v_j)} \alpha(r') \leq \alpha(v_j) - \alpha(r), \quad r' \neq r; \\ 1, & \text{если } v_j \notin \Phi(r) \text{ и } \sum_{r' \in \Phi^{-1}(v_j)} \alpha(r') > \alpha(v_j) - \alpha(r), \quad r' \neq r; \\ \Delta_j - \frac{\alpha(r)}{\alpha(v_j)}, & \text{если } v_j \in \Phi(r) \text{ и ветвь } v_j \text{ не перенасыщена}; \\ 1, & \text{если } v_j \in \Phi(r) \text{ и } v_j \text{ перенасыщена.} \end{cases}$$

Также для каждой ветви v_j положим $\rho^*(v_j) = \rho(v_j) / (1 - \delta_j)$. Если $\delta_j = 1$, то очевидно, $\rho^*(v_j) = \infty$.

п. 6. Ищем кратчайший путь между вершинами x, y в графе PS с весами ветвей $\rho^*(v)$. Если этот путь имеет конечный вес, то на п. 7, иначе на п. 15.

п. 7. Осуществляем перетрассировку ребра r по найденному в п. 6 кратчайшему пути. Заново вычисляем все Δ_j по формуле

$$\Delta_j = \sum_{r \in \Phi^{-1}(v_j)} \alpha(r) / \alpha(v_j).$$

Если в получившейся гиперсети отсутствуют перенасыщенные ветви, то на п. 8, иначе на п. 5.

п. 8. Если $\omega(S) \geq k$ (проверка осуществляется с помощью переборного алгоритма [12]), то на п. 14, иначе на п. 9.

п. 9. С помощью переборного алгоритма находим минимальное сечение $\{x_1, \dots, x_p\}$, $p < k$, гиперсети по вершинам.

п. 10. Найдем все ребра r , трассы которых содержат вершины из сечения $\{x_1, \dots, x_p\}$, а концевые вершины лежат в разных компонентах связности S_1 и S_2 гиперсети $S \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$. Хотя бы одно такое ребро найдется, так как WS k -связен. Выберем среди них ребро $r = (x, y)$ с наибольшим значением $\alpha(r)$.

п. 11. Для каждой ветви v_j вычислим δ_j по формуле

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \notin \Phi(r) \text{ и } \sum_{r' \in \Phi^{-1}(v_j)} \alpha(r') > \alpha(v_j) - \alpha(r), \quad r' \neq r; \\ \frac{1}{\alpha(v_j)} \sum_{r' \in \Phi^{-1}(v_j)} \alpha(r) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Также для каждой ветви v_j положим $\rho^*(v_j) = \rho(v_j) / (1 - \delta_j)$. Если $\delta_j = 1$, то $\rho^*(v_j) = \infty$.

п. 12. Найдем кратчайший путь между вершинами x, y в графе $PS \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ с весами ветвей $\rho^*(v)$. Если этот путь имеет конечный вес, то на п. 13, иначе на п. 15.

п. 13. Осуществляем перетрассировку ребра r по найденному в п. 12 кратчайшему пути. Если исчерпаны все ребра, трассы которых содержат вершины из сечения $\{x_1, \dots, x_p\}$, а концевые вершины лежат в разных компонентах связности S_1 и S_2 гиперсети $S \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$, то на п. 9, иначе на п. 10. Повторяем п. 9—13 до тех пор, пока не будет найдена гиперсеть, удовлетворяющая условиям (10), (11), или не повторится минимальное сечение. В первом случае на п. 14, во втором — на п. 15.

п. 14. Гиперсеть, удовлетворяющая условиям (10), (11), найдена.

п. 15. Допустимое решение не найдено.

Применение переборного алгоритма здесь оправдано тем, что связность гиперсетей для практических целей небольшая.

8. АЛГОРИТМЫ СИНТЕЗА ГИПЕРСЕТЕЙ С ЗАДАННОЙ ВЕРШИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Задачи синтеза гиперсетей имеют различную сложность решения. Покажем на примерах, как незначительное изменение в постановке задачи влияет на сложность ее решения. Пусть заданы первичная сеть $PS = (X, V)$, для которой $\omega(PS) \geq 2$, и вторичная сеть $WS = (Y, R)$ — простой цикл, и пусть $|X| = |Y|$. Необходимо найти гиперсеть $S = (PS, WS; \Phi)$, у которой вершинная связность равна 2. Если известно отображение $f: Y \rightarrow X$, то легко решается вопрос о наличии допустимого решения, в противном случае к поставленной задаче сводится задача поиска гамильтонова цикла, т. е. задача синтеза становится NP -полной.

Очевидным фактом является то, что k -связность пары вершин в гиперсети S не может превосходить связности этой же пары вершин в первичной и вторичной сетях гиперсети $S = (PS, WS; \Phi)$. Например, на рис. 7 вершины s и t 2-связны в S , но 3-связны в PS и WS . Возникает вопрос, всегда ли можно найти гиперсеть S' , для которой $\omega(S') = \min(\omega(PS), \omega(WS))$? Оказывается, что такая гиперсеть не всегда существует (рис. 8). Гиперсети S_1, S_2 очевидно, односвязны; S_3 разрушается при удале-

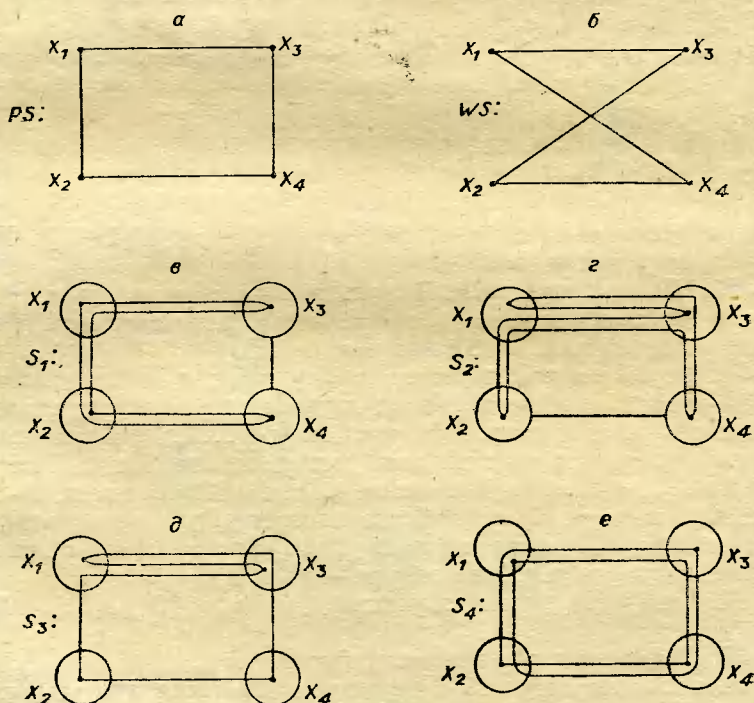


Рис. 8. Односвязные гиперсети.

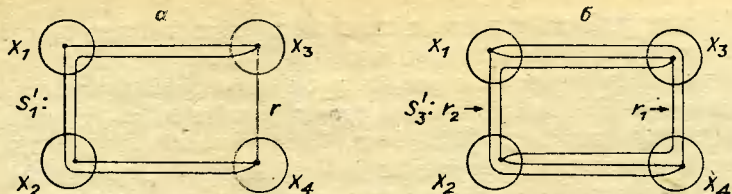


Рис. 9. Двухсвязные гиперсети.

нии вершины x_1 или x_3 , а S_4 становится несвязной при удалении любой вершины. Из приведенных примеров видно, что для данных PS и WS не существует гиперсети, имеющей связность, равную двум. В связи с этим возникает следующая задача синтеза гиперсети S .

Пусть заданы первичная сеть $PS = (X, V)$ и вторичная $WS = (Y, R)$. Требуется найти гиперсеть $S = (X, V, R')$ такую, что $\omega(S) = \min(\alpha(PS), \omega(WS))$. Причем к вторичной сети WS разрешается добавлять ребра. Критерий эффективности — минимум суммарной длины ребер. На рис. 9 приведены примеры гиперсетей S'_1 и S'_3 , которые становятся двухсвязными при добавлении новых ребер к S_1 и S_3 . Причем к S_1 (см. рис. 8, в) добавлено ребро между вершинами x_3, x_4 , несмежными в WS ; к S_3 (см. рис. 8, б) — ребра (x_1, x_4) и (x_2, x_3) , соединяющие уже смежные в WS вершины, т. е. некоторые ребра в WS распараллеливаются и реализуются по независимым маршрутам в PS .

Поставленная задача, очевидно, имеет решение, так как, добавив ребра ко всем парам V -смежных вершин в гиперсети S , получим гиперсеть S' , для которой $\omega(S') = \omega(PS)$, но такое решение будет, видимо, неоптимальным. Прием повышения связности гиперсети за счет добавления новых ребер не всегда пригоден, так как изменяется структура вторичной сети. Поэтому возникает задача увеличения связности гиперсети за счет распараллеливания ребер вторичной сети. В этом случае структура последней остается неизменной.

8.1. Пусть заданы первичная сеть $PS = (X, V)$ и вторичная $WS = (Y, R)$. Предположим, что при оптимальной (с точки зрения максимума связности) реализации WS в PS получится гиперсеть S , для которой $\omega(S) < \min(\omega(PS), \omega(WS))$. Тогда имеет место

Теорема 18. Для любых PS и WS всегда можно построить гиперсеть S (распараллеливая некоторые ребра WS) такую, что $\omega(S) = \min(\omega(PS), \omega(WS))$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в построенной гиперсети S найдется минимальное сечение $\{x_i\}$ такое, что $|\{x_i\}| < \min(\omega(PS), \omega(WS)) = k$. Так как $\omega(WS) \geq k$, то среди вершин $\{x_i\}$ найдется такая, которая слабо инцидентна некоторому ребру из WS . Причем концевые вершины x_i, x_l этого

ребра будут лежать в разных компонентах связности гиперсети $S \setminus \{x_i\}$. Распараллелим найденное ребро (x_i, x_i) на два: $(x_i, x_i)^1$ и $(x_i, x_i)^2$. Первое из них реализуется по старой трассе, а второе — в графе $PS \setminus \{x_i\}$. Очевидно, что вершины x_i, x_i будут связаны в $PS \setminus \{x_i\}$, так как $\omega(PS) \geq k$. Следовательно, во вновь полученной гиперсети S' вершины $\{x_i\}$ не являются минимальным сечением, — противоречие. Тем самым теорема доказана.

Теперь рассмотрим следующую задачу. Для заданных первичной PS и вторичной WS сетей найти гиперсеть $S' = (PS, WS; \Phi)$, которая удовлетворяет условиям (10), (11), а граф WS' получается из WS в результате распараллеливания некоторых ребер.

Алгоритм А2:

п. 1. Реализовать алгоритм А1. Если полученная гиперсеть удовлетворяет условиям (10), (11), то на п. 6, иначе на п. 2.

п. 2. Если гиперсеть S удовлетворяет условию (11), но не удовлетворяет условию (10) или оба условия нарушаются, то на п. 3, иначе на п. 4.

п. 3. В построенной гиперсети S найти минимальное сечение $\{x_i\}$. По множеству $\{x_i\}$ найти слабо инцидентное одной из вершин $\{x_i\}$ ребро $(x_i, x_i) \in R$ и с помощью алгоритма ПНМ, описанного в [12], или другого подходящего алгоритма [4, 11] найти в PS две независимые цепи между вершинами x_i, x_i . Емкость $\alpha(r_i, i)$ данного ребра распределяется по цепям в PS так, чтобы удовлетворялось условие (11). Если это невозможно, то на п. 5, иначе повторить п. 3. Как только связность S станет равной k , то на п. 4.

п. 4. В гиперсети S найти перенасыщенную ветвь v (для которой $\alpha(v) > \sum_{r \in \Phi^{-1}(v)} \alpha(r)$). Найти инцидентные ребра $\Phi^{-1}(v)$

данной ветви v и выбрать среди них такое подмножество $R'' \subset \Phi^{-1}(v)$, чтобы $\alpha(v) \leq \sum_{r \in \Phi^{-1}(v) \setminus R''} \alpha(r)$. Последовательно

распараллеливая эти ребра и распределяя их емкости по дубликатам, попытаемся удовлетворить условию (11). Если это не удастся, то на п. 5, иначе п. 4. Повторяется до тех пор, пока не будут проверены все ветви, переход на п. 6.

п. 5. Допустимое решение не найдено.

п. 6. Гиперсеть S построена.

Сходимость алгоритма очевидна. Если ограничение (11) не является критическим, то гиперсеть с заданной связностью будет обязательно найдена. Кроме того, алгоритм позволяет находить гиперсеть с квазимиимальной стоимостью. Поставленная задача, вообще говоря, не всегда позволяет построить гиперсеть S со связностью, равной $\omega(PS)$, т. е. связность вторичной сети существенно влияет на связность S . Поэтому актуальна задача синтеза гиперсети S , для которой $\omega(S) = \omega(PS)$. Этого можно добиться добавлением новых ребер в WS .

8.2. Пусть заданы первичная сеть $PS = (X, V)$ и вторичная $WS = (Y, R)$. Требуется найти гиперсеть $S = (PS, WS; \Phi)$ такую, чтобы $\omega(S) = k \leq \omega(PS)$ и выполнялось условие (11), где $WS' = (Y, R \cup U)$, а U — множество добавленных ребер. Причем при добавлении очередного ребра емкости ребер WS' пересчитываются.

Алгоритм А3:

п. 1. Реализовать алгоритм А1. Если полученная гиперсеть удовлетворяет условию (11) и $\omega(S) = k$, то на п. 5 иначе на п. 2.

п. 2. Если гиперсеть S не удовлетворяет условию (11), то на п. 4, иначе на п. 3.

п. 3. В S найти минимальное сечение $\{x_i\}$. Выделить в $S \setminus \{x_i\}$ компоненты связности WS^1 и WS^2 . Найти в них пару ближайших несмежных вершин $x_i \in WS^1$ и $x_i \in WS^2$. Соединить вершины x_i и x_i ребром. Пересчитать емкости ребер с помощью заданной процедуры расчета емкостей. Перейти на п. 1.

п. 4. Допустимое решение не существует.

п. 5. Гиперсеть S найдена.

Сходимость алгоритма очевидна. Отсутствие допустимого решения определяется только условием (11).

В заключение раздела рассмотрим быстрый алгоритм синтеза гиперсети с достаточно большой связностью.

8.3. Пусть заданы первичная сеть $PS = (X, V)$ и вторичная $WS = (Y, R)$. Требуется найти гиперсеть $S = (PS, WS; \Phi)$ с максимально возможной связностью. Вес каждой ветви и вершины равен единице.

Алгоритм А4:

п. 1. Упорядочим ребра $r = (x_i, x_j) \in R$ по убыванию расстояния $\rho(x_i, x_j)$ в PS . Получим список ребер $\{r_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $i := 1$.

п. 2. Реализуем r_i в PS по кратчайшему пути (кратчайший по суммарному весу вершин и ребер).

п. 3. Увеличим вес вершин и ребер найденной трассы ребра r_i . Вес увеличивается на некоторую величину $z(S)$, которая зависит от текущего состояния гиперсети S .

п. 4. Если все ребра WS' реализованы, то при $\omega(S) = \min(\omega(PS), \omega(WS))$ — на п. 10, иначе на п. 5, если не реализованы — $i := i + 1$, переход на п. 2.

п. 5. С помощью переборного алгоритма найти минимальное сечение по вершинам $\{x_i\}$.

п. 6. Найти все ребра r , слабо инцидентные вершинам из $\{x_i\}$, такие, что их концевые вершины лежат в разных компонентах связности S_1 и S_2 гиперсети $S \setminus \{x_i\}$. Хотя бы одно такое ребро обязательно найдется, так как WS k -связен.

п. 7. В первичной сети $PS \setminus \{x_i\}$ между всеми парами концевых вершин x_i, x_j найдем кратчайшие пути. (Путь обязательно найдется, так как $\omega(PS) \geq k$.)

п. 8. Выберем такую пару x_i и x_j , для которой следующая разность минимальна:

$$\rho_{PS \setminus \{x_i\}}(x_i, x_j) - \rho_{PS}(x_i, x_j).$$

п. 9. Реализуем ребро (x_i, x_j) по новой трассе, тогда сечение, разделяющее компоненты S_1 и S_2 , увеличится. Повторяем п. 3—6 до тех пор, пока связность $\omega(S)$ увеличивается, переход на п. 10.

п. 10. Гиперсеть с квазимаксимальной связностью найдена.

9. О ПОСТРОЕНИИ ГИПЕРСЕТЕЙ С ЗАДАННОЙ КВАЗИСВЯЗНОСТЬЮ

Рассматриваются задачи синтеза в классе $(X \rightarrow R)$ -гиперсетей с заданной частичной квазисвязностью и ограничением на ранг связывающих квазимаршрутов. Во всех этих задачах считается заданной первичная сеть $PS = (X, V)$ синтезируемой гиперсети.

9.1. Рассмотрим T -гиперсеть, в первичной сети $PS = (X, V)$ которой выделен корень $x_0 \in X$. Вторичная сеть $WS = (X, R)$ содержит то же множество вершин и $|R|$ ребер, причем каждое ребро $r \in R$ инцидентно x_0 и слабо инцидентно остальным вершинам $X \setminus \{x_0\}$. Из определения T -гиперсети следует, что каждому ребру $r \in R$ сопоставлено некоторое корневое дерево T_r в графе $PS = (X, V)$.

Обозначим $\lambda_i(\omega_i)$ — реберную (вершинную) связность вершины $x_i \in X$ с вершиной x_0 в графе PS . Тогда корневая реберная и вершинная связности графа PS определяются следующим образом:

$$\lambda = \max_{x_i \in X - x_0} \lambda_i, \quad \omega = \max_{x_i \in X - x_0} \omega_i. \quad (12)$$

Два ребра r_1 и r_2 гиперсети $S = (X, V, R)$ называются T_λ -независимыми, если для любой вершины $x \in X$ существуют два независимых по ветвям квазимаршрута из x_0 в x , принадлежащих r_1 и r_2 . Соответствующие квазимаршруты назовем T_λ -независимыми. T_ω -независимость определяется аналогично, т. е. с учетом независимости квазимаршрутов по вершинам. В дальнейшем будем говорить просто о T -независимости, если соответствующие утверждения справедливы для частичной квазисвязности T -гиперсети как по ветвям, так и по вершинам.

Множество ребер T -гиперсети, инцидентных вершине x_0 , будем называть T -покрытием в $S = (X, V, R)$, если они попарно T -независимы. Полным T -покрытием гиперсети S будем называть такое T -покрытие $\Theta(S)$, что $|R|$ равно корневой связности PS и каждая вершина $x \in X$ слабо инцидентна k ребрам, где k равно числу связности этой вершины с корнем x_0 в PS .

Теорема 19. Для любой первичной сети $PS = (X, V)$ с корнем x_0 существует T -гиперсеть $S = (X, V, R)$, в которой множество R является полным T -покрытием.

В работе [13] представлено доказательство теоремы как для T_0 -, так и для T_k -покрытия. В последнем случае приведены два алгоритма синтеза. Здесь рассмотрен алгоритм, который позволяет находить полное T -покрытие, т. е. алгоритм синтеза T -гиперсети, где частичная квазиотделимость (как по ветвям, так и по вершинам) любой вершины x от вершины x_0 будет максимально возможной, а ранг любого (x_0, x) -квазимаршрута равен единице.

Алгоритм А5.

п. 1. Для каждой вершины $x \in X$, $x \neq x_0$ вычислим $k(x)$ -связность вершины x с x_0 , $k(x_0) := \max_{x \in X - x_0} k(x)$, $i := 1$, $X_i := x_0$, $V_i := \phi$,

$T_i := (X_i, V_i)$, $\Theta(S) := \{T_1, \dots, T_{k(x_0)}\}$, $\forall x \ l(x) := 0$. Граф $PS =$

$= (X, V)$ преобразуется в оргграф $PS' = (X, V')$ заменой каждой ветви на пару противоположно ориентированных дуг, а ветви, инцидентной x_0 , на дуги, ориентированные из x_0 .

п. 2. В графе PS' выбираем дугу $v = (x, \bar{x})$ из X_i в $X - X_i$ такую, что дерево $T_i = (X_i \cup \bar{x}, V_i \cup v)$ не нарушает T -покрытие $\Theta(S)$. Причем количество независимых цепей из x_0 в \bar{x} в графе $PS'' = (X, V' - v)$ уменьшится по сравнению с графом PS' ровно на единицу и степень вершины x_0 в графе PS'' станет не меньше $k(x_0) - 1$. Если такая дуга не найдена, то на п. 4, иначе на п. 3.

п. 3. $V' := V' - v$, $T_i := (X_i \cup \bar{x}, V_i \cup v)$, переход на п. 2.

п. 4. Проверяем последовательно все существующие и вновь получаемые висячие вершины дерева T_i на выполнение неравенства

$$k(x) - l(x) < k(x_0) - i. \quad (13)$$

Если это неравенство для некоторой висячей в T_i вершины x выполняется, то $V' := V' \cup (y, x)$, $((y, x) \in T_i)$, $T_i := (X_i - x, V_i - (y, x))$, иначе переходим к следующей висячей вершине. Процесс заканчивается, если висячих вершин в T_i , удовлетворяющих неравенству (13), не остается.

п. 5. $\forall x \in T_i \ l(x) := l(x) + 1$, $i := i + 1$, если $i > k(x_0)$, то на п. 6, иначе на п. 2.

п. 6. Полное T -покрытие найдено.

Проверка правильности подключения новой вершины в T_i в п. 2 осуществляется путем проверки числа независимых путей из x_0 в x в графе PS'' [4]. После того как найдено $\Theta(S)$ -покрытие, каждому ребру $r \in R \subset WS$ будет сопоставлено дерево из $\Theta(S)$. Таким образом, найдена T -гиперсеть, удовлетворяющая условиям задачи синтеза.

9.2. Применение теории гиперсетей в задачах синтеза коммуникационных сетей инициирует еще несколько важных постановок задач синтеза гиперсетей с заданной частичной квазисвяз-

ностью. Пусть задана первичная сеть $PS = (X, V)$ и некоторое подмножество вершин $x_0 \cup X'$, где $X' = (x_1, \dots, x_k) \subset X$. Требуется найти гиперсеть $S = (X, V, R)$ такую, чтобы между вершинами x_0 и $x_i \in X'$ имела место частичная k_i -квазинеотделимость по ветвям (вершинам), где $k_i \leq \lambda_i (k_i \leq \omega_i)$. Ясно, что решение поставленной задачи легко получить с помощью алгоритма А5. Действительно, положим $k(x_0) = \max_{x \in X'} k(x)$ и найдем $\Theta(S)$ -по-

крытие. Затем, поочередно рассматривая висячие вершины $x_j \in T_i$, будем их удалять из T_i , если они не принадлежат X' или число слабо инцидентных ребер превышает k_j .

Часто может возникнуть ограничение на число слабо инцидентных вершин любому ребру $r \in R$. Данное ограничение естественным образом может быть учтено в предыдущих задачах путем разбиения каждого ребра r на две части r' и r'' по некоторой вершине x так, что x_0 инцидентно r' , а x инцидентно r'' и слабо инцидентно r' . Затем процесс разбиения можно продолжить.

В предыдущих задачах синтеза T -гиперсетей предполагалась частичная k -квазинеотделимость корня x_0 от других вершин гиперсети S . Если потребовать попарную частичную k -квазинеотделимость в синтезируемой гиперсети, то задача решается тривиально. Достаточно потребовать, чтобы гиперсеть одновременно принадлежала к классам $(V \rightarrow R)$ - и $\{X - R\}$ -гиперсетей, т. е. вторичная сеть WS будет изоморфна некоторому суграфу PS' графа PS , причем PS' должен удовлетворять заданным характеристикам связности. Однако данная задача представляет особый интерес, когда есть ограничение на ранг независимых квазимаршрутов, соединяющих различные вершины гиперсети. В этом случае, поочередно объявляя каждую вершину гиперсети корнем, решаем первую задачу (алгоритм А5), затем последовательно удаляем висячие ребра в покрывающих деревьях, отслеживая выполнение ограничения и условия задачи.

10. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ГИПЕРСЕТЕЙ

Развитие теории гиперсетей имеет фундаментальное значение для исследования и проектирования иерархических систем сетевой структуры, т. е. таких, в которых иерархия определяется вложением одной подсистемы в другую. Перечислим некоторые важные направления гиперсетей.

10.1. Маршруты в гиперсетях. В разд. 3 сформулированы и решены некоторые задачи поиска оптимальных маршрутов. Представляют интерес задачи, связанные с поиском обходов элементов гиперсетей, в частности бесповторных обходов ребер, ветвей или вершин, а также обобщения указанных задач [14]. Важны также задачи, связанные с метрикой гиперсетей (поиск цент-

ров, медиан и т. п.). По-видимому, задачи данного направления в основном разрешимы за полиномиальное время.

10.2. Упаковки и покрытия. Так же как и в теории гиперграфов, для гиперсетей определяются упаковки и покрытия, т. е. для любой пары множеств из X , V , R и соответствующих отношений инциденции или смежности можно определить понятия упаковки и покрытия [6]. Кроме того, в гиперсетях возможно определение этих понятий, когда одно множество сопоставляется двум другим. В этом направлении возникают принципиально новые задачи.

10.3. Частичные гиперсети. Удаляя различные элементы из гиперсетей, можно получать всевозможные частичные гиперсети с теми или иными свойствами. Например, возможны следующие задачи: найти минимальную (по числу вершин, ветвей или ребер) частичную гиперсеть, связывающую заданное множество вершин или ветвей; найти компоненты связности, блоки и части гиперсетей с заданной связностью.

10.4. Эквивалентные гиперсети. Две гиперсети $S' = (X', V', R')$ и $S'' = (X'', V'', R'')$ эквивалентны, если и только если изоморфны PS' , PS'' и WS' , WS'' , кроме того, $X' \leftrightarrow X''$. Две гиперсети S' и S'' равносильны, если WS' изоморфен WS'' при $X' \leftrightarrow X''$, и равнозначны, если PS' изоморфен PS'' . Основные задачи по этому направлению связаны с поиском эквивалентных (равносильных, равнозначных) гиперсетей с заданным свойством (набором характеристик).

10.5. Планарность. Гиперсеть S называется R -планарной, если ее можно расположить на плоскости так, чтобы ребра не пересекались (пересечение ребер запрещается как по ветвям, так и внутри вершин; см. геометрическое представление гиперсети на рис. 6. Здесь ребра пересекаются в вершине 1 и не пересекаются в других вершинах. Кроме того, ребро $(s, 4)$ пересекается с ребром $(s, 6)$ по ветви $(5, 6)$).

С понятием планарности гиперсетей связан ряд задач: найти необходимые и достаточные условия R -планарности гиперсети; сформулировать алгоритм укладки R -планарной гиперсети; найти эквивалентную данной гиперсеть, которая была бы R -планарной, если планарны PS и WS . Возможны и другие задачи, связанные с минимизацией числа пересечений, и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыков А. А. Гиперграфы.— Успехи мат. наук, 1974, т. XXIX, вып. 6 (180), с. 89—154.
2. Нечепуренко М. И. Модели структурного резервирования систем.— В кн.: Прикладные задачи на графах и сетях. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981, с. 57—86.
3. Gattinger M., Wensel G. Hupernetworks as toos for modeling multiport systems.— J. of the Franklin Inst., v. 317, N 4, 1984.

4. Оре О. Теория графов.— М.: Наука, 1968.
5. Применение теории графов связей в технике/Под ред. Д. Кэрнопа, Р. Розенберга.— М.: Мир, 1974.
6. Попков В. К. Гиперсети и структурные модели сложных систем.— В кн.: Математические и имитационные модели сложных систем. СМ-6. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981, с. 26—48.
7. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.
8. Попков В. К. О сложности алгоритмов поиска цепей в гиперсетях.— В кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Ч. 2. Тезисы докладов III Всесоюзного совещания 28—30 августа 1984 г. Ташкент. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984, с. 106—107.
9. Кауль С. Б. Отделимость и соединимость в гиперсетях.— Там же, с. 57—58.
10. Кауль С. Б., Попков В. К. О сложности вычисления некоторых характеристик связности.— В кн.: Эффективность и структурная надежность информационных систем. СМ-7. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 99—115.
11. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.
12. Методы оптимизации структур зонных сетей связи/Под ред. чл.-кор. АН СССР А. С. Алексеева.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.
13. Майнагашев С. М., Попков В. К. Структурно-надежные сети связи с групповыми каналами.— В кн.: Системное моделирование-10. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984, с. 24—41.
14. Попков В. К. Маршруты в гиперсетях.— В кн.: Эффективность и структурная надежность информационных систем. СМ-7. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 13—28.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

МЕТОД V-КОЛЕЦ В ТЕОРИИ ГРУПП ПОДСТАНОВОК И ЕГО КОМБИНАТОРНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

М. Х. КЛИН, И. А. ФАРАДЖЕВ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый обзор посвящен исследованиям, находящимся на стыке теории групп подстановок и теории графов. Со времен Э. Галуа группы подстановок появляются в математике и ее приложениях как группы автоморфизмов математических структур. В XX веке в качестве таких структур чаще всего выступают комбинаторные объекты (графы, гиперграфы, блок-схемы и т. д.). Если зафиксировать определенным образом понятие подобъекта, например в смысле [1], то совокупность $G = \text{Aut}(S)$ всех автоморфизмов объекта S образует подгруппу группы $G' = \text{Aut}(S')$ автоморфизмов подобъекта S' . Благодаря этому изучение решетки групп, содержащих G в качестве подгруппы, часто удается свести к изучению решетки подобъекта S .

Универсальность подхода, основанного на рассмотрении такого рода антимонотонных (относительно включения) соответствий Галуа, была осознана в конце 30-х годов М. Краснером, описавшим в [2] галуа-замкнутые объекты. Оказалось, что всякая группа подстановок (G, N) реализуется как группа автоморфизмов подходящей системы отношений. С другой стороны, множество отношений над N является множеством всех инвариантных отношений некоторой группы подстановок тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно определенного набора операций над отношениями, т. е. является алгеброй Краснера в смысле [3, 4]. Эти идеи, обобщенные на случай полугрупп преобразований и алгебр многоместных функций, легли в основу метода инвариантных отношений, развитого в работах Л. А. Калужнина и его учеников (см., например, [5, 6]).

Особенно плодотворным оказалось изучение частичного (относительно теории Краснера) соответствия между группами подстановок и системами бинарных отношений. При этом большую роль сыграла техника S -колец и колец централизаторов (V -кольца), восходящая к И. Шуру и развитая Г. Виландом [7, 8]. Как считает Г. Виланд [9], метод инвариантных отношений и техни-

ка V -колец, наряду с теорией представлений, являются главными инструментами в теории групп постановок.

Метод V -колец в конечном счете сводится к получению и обработке больших числовых массивов, каждый элемент которых трактуется как количество путей специального вида в цветных ориентированных графах. При этом возникают новые интересные задачи дискретной математики (например, задача перечисления клеточных подколец V -кольца). Такие вычисления, как правило, весьма громоздки, поэтому их разумно проводить с помощью ЭВМ. Трудность исследований в области V -колец связана с тем, что они требуют сочетания обширных познаний в области конечных групп с тонкой комбинаторной интуицией и виртуозной программистской техникой. Некоторые комбинаторные и алгоритмические проблемы, возникающие при реализации метода V -колец, близки к проблемам идентификации и конструктивного перечисления комбинаторных объектов [10, 11].

Ввиду ограниченного объема обзора полностью опущены все доказательства; многие формулировки результатов приводятся на содержательном уровне (если для их уточнения потребовались бы громоздкие определения). В то же время много внимания уделено вопросам истории и методики исследований. Особо выделены вычислительные аспекты и обоснована необходимость широкого использования ЭВМ. Некоторые из затронутых вопросов более подробно обсуждаются в [6, 12, 13]. У читателя обзора предполагается знакомство с языком теории графов по монографии Ф. Харари [14] и с элементарными сведениями из теории групп подстановок в объеме начальных параграфов книги Г. Виланда [7].

Авторы благодарны всем своим коллегам, результаты работы которых отражены в обзоре, особенно А. А. Иванову, предложившему ряд полезных уточнений.

§ 2. V -КОЛЬЦА ГРУПП ПОДСТАНОВОК И КЛЕТОЧНЫЕ КОЛЬЦА

Пусть (G, N) — группа подстановок, действующая на множестве $N = \{1, 2, \dots, n\}$; $M(g)$ — матрица-подстановка, соответствующая элементу $g \in G$. Рассмотрим множество $Z^{n \times n}$ всех целочисленных квадратных матриц порядка n и его подмножество $V(G) = \{A \in Z^{n \times n} : \forall g \in G \ AM(g) = M(g)A\}$, состоящее из матриц, коммутирующих с матрицами-подстановками из G . Легко видеть, что $V(G)$ — кольцо, его называют кольцом централизаторов или V -кольцом группы (G, N) . Этот термин, восходящий к И. Шуру, введен Г. Виландом [7], а само обозначение происходит от немецкого слова *Vertauschungsringe*.

Будем интерпретировать матрицу из $Z^{n \times n}$ с неотрицательными элементами как матрицу смежности $M(\Phi)$ ориентированного

мультиграфа Φ с множеством вершин N . Из определения V -кольца следует, что именно матрицы из $V(G)$ с неотрицательными элементами и только они могут быть матрицами смежности мультиграфов, инвариантных относительно (G, N) .

Введенный теоретико-графовый язык обычно оказывается удобным для описания и исследования V -колец. Пусть Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} — 2-орбиты группы (G, N) , т. е. орбиты действия G на $N \times N$. Будем отождествлять 2-орбиты с ориентированными графами на множестве вершин N ; они являются минимальными по включению орграфами, инвариантными относительно (G, N) . Любой ориентированный мультиграф Φ , инвариантный относительно (G, N) , можно отождествить с формальной суммой $\Phi = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i Q_i$, считая, что в мультиграфе Φ вершины a и b соединены α_i дугами, если $(a, b) \in Q_i$. На множестве 2-орбит введем операцию умножения, определяемую умножением их матриц смежности. Поскольку получившийся мультиграф инвариантен относительно (G, N) , его можно записать в виде

$$(1) Q_i Q_j = \sum_{h=0}^{r-1} \gamma_{ij}^h Q_h.$$

Коэффициенты γ_{ij}^h в этой формуле имеют простой геометрический смысл. Пусть $(a, b) \in Q_k$. Тогда γ_{ij}^k равно числу вершин c , таких что $(a, c) \in Q_i$, а $(c, b) \in Q_j$. Распространяя это умножение по дистрибутивности на произвольные формальные суммы

$\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i Q_i$ с целочисленными коэффициентами, получим изоморфную реализацию V -кольца группы (G, N) в виде целочисленного модуля со свободными образующими Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} . Образующие при этом называются базисными графами V -кольца, а коэффициенты γ_{ij}^h — структурными константами.

Отметим следующие свойства базисных графов:

$$(2) \forall i, j \quad 0 \leq i, j \leq r-1 \quad i \neq j \Rightarrow Q_i \cap Q_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=0}^{r-1} Q_i = N \times N;$$

$$(3) \forall i \quad 0 \leq i \leq r-1 \quad \exists j: Q_i^{-1} = Q_j, \quad \text{где}$$

Q_i^{-1} — отношение, обратное к Q_i , т. е. $(a, b) \in Q_i \Leftrightarrow (b, a) \in Q_i^{-1}$;

(4) полустепени исхода (или захода) всех вершин графа Q_i , если они ненулевые, имеют одно и то же значение $d^+(Q_i)$ (или $d^-(Q_i)$).

В случае, когда (G, N) — транзитивная группа подстановок, все базисные графы регулярны. Степени $d(Q_i)$ этих графов называют подстепенями группы (G, N) , а их количество r — ее рангом. При этом обозначение Q_0 используют для рефлексивного графа, состоящего из одних петель.

Естественно рассмотреть алгебраическую структуру, возникающую на пути аксиоматического описания V -колец. Клеточным

кольцом (клеточной алгеброй) называется матричная алгебра W над кольцом Z (полем R), обладающая следующими свойствами [10]:

(1') W имеет базис $B = \{e_0, e_1, \dots, e_{r-1}\}$, состоящий из $(0, 1)$ -матриц;

(2') $\sum_{i=0}^{r-1} e_i = I_n$, где n — порядок матриц из W , I_n — матрица,

целиком состоящая из единиц;

(3) если $e_i \in B$, то $e_i' \in B$, где A' — матрица, транспонированная к A ;

(4') существует функция $d(e_i)$ с натуральными значениями, такая что число единиц в каждой ненулевой строке матрицы e_i равно $d(e_i)$.

Тот факт, что $\{e_0, e_1, \dots, e_{r-1}\}$ образует базис клеточного кольца W , будем обозначать так: $W = \langle e_0, e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$, при этом W называют клеточным кольцом ранга r . Каждую матрицу из базиса клеточного кольца, как и в случае V -колец, можно интерпретировать как матрицу смежности некоторого ориентированного мультиграфа $Q_i: e_i = M(Q_i)$. В дальнейшем будем отождествлять матричное кольцо $\langle e_0, e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$ с изоморфным ему кольцом мультиграфов $\langle Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} \rangle$. Если все базисные графы клеточного кольца регулярны, то такое кольцо называется клеткой; клетку, все антирефлексивные базисные графы которой связны, называют примитивной. Если клеточное кольцо совпадает с V -кольцом некоторой группы подстановок, оно называется шуровым.

Аксиомы (1') — (4') клеточного кольца, соответствующие свойствам (1) — (4) базисных графов V -кольца, можно рассматривать как комбинаторную аппроксимацию условия транзитивности действия некоторой группы (G, N) на дугах каждого из базисных графов. Оказывается, что такая аппроксимация дает лишь необходимые условия транзитивного действия: известны многочисленные примеры нешуровых клеточных колец. Первые примеры таких колец ранга 3 построены в [15—17].

Следует отметить, что понятие клеточного кольца несколько раз переоткрывалось по различным мотивациям: в теории модулярных форм, теории планирования эксперимента, теории групп подстановок, алгебраической теории кодирования. Вот несколько синонимов с точностью до используемого языка и аксиоматических нюансов: алгебры Гекке [18], схемы отношений, когерентные конфигурации, ассоциативные схемы (см. [10, 19]).

Из широкого спектра вопросов, возникающих при исследовании клеточных колец, нас будут интересовать лишь те, которые прямо или косвенно связаны с рассмотрением соответствия Галуа между группами подстановок, действующими на множестве N , и клеточными кольцами, базисные элементы которых суть графы с множеством вершин N .

§ 3. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРУПП ПОДСТАНОВОК МЕТОДОМ V -КОЛЕЦ

На множестве клеточных колец, базисные графы которых имеют одно и то же множество вершин N , введем отношение частичного порядка. Будем говорить, что кольцо $W' = \langle Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{s-1} \rangle$ является клеточным подкольцом кольца $W = \langle Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} \rangle$, $s \leq r$, если каждый базисный граф Q'_i , $0 \leq i \leq s-1$, получается объединением некоторых базисных графов из $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1}\}$. В этом случае будем писать $W' \leq W$. Группой автоморфизмов $\text{Aut}(W)$ клеточного кольца $W = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1}\}$ будем называть пересечение групп автоморфизмов его базисных графов: $\text{Aut}(W) = \bigcap_{i=0}^{r-1} \text{Aut}(Q_i)$. Так как каждый базисный граф

V -кольца группы (G, N) инвариантен относительно этой группы, то группа автоморфизмов кольца $V(G)$ содержит группу (G, N) : $(G, N) \subseteq \text{Aut}(V, G)$. Группа автоморфизмов V -кольца группы (G, N) называется 2-замыканием группы (G, N) и обозначается $(G^{(2)}, N)$. Если $(G^{(2)}, N) = (G, N)$, то группа (G, N) называется 2-замкнутой. Очевидно, что только 2-замкнутые группы могут быть группами автоморфизмов орграфов, однако известны примеры 2-замкнутых групп, которые нельзя реализовать как группы автоморфизмов орграфов [20].

Легко видеть, что из $\langle Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{s-1} \rangle \leq \langle Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} \rangle$ следует $\text{Aut}(\langle Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{s-1} \rangle) \supseteq \text{Aut}(\langle Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} \rangle)$, причем при $s \neq r$ группы автоморфизмов совпадают только тогда, когда кольцо $\langle Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{s-1} \rangle$ пешурово. С другой стороны, если $(H, N) \subseteq (G, N)$, то $V(H) \leq V(G)$, причем при $H \neq G$ V -кольца могут совпасть, только если (G, N) не 2-замкнута. Таким образом, функторы V и Aut устанавливают соответствие Галуа между решеткой надгрупп группы подстановок и решеткой клеточных подколец ее V -кольца. Галуа-замкнутыми объектами этого соответствия являются 2-замкнутые группы подстановок и шуровы клеточные кольца.

Описанное соответствие Галуа позволяет во многих случаях совместно изучать группы подстановок и графы, группами автоморфизмов которых они являются. Если дана группа подстановок (G, N) и требуется описать решетку ее надгрупп в симметрической группе $S(N)$, то с помощью V -колец можно получить все самые интересные с теоретико-графовой точки зрения элементы этой решетки — 2-замкнутые надгруппы. Для этого нужно построить V -кольцо, перечислить все его клеточные подкольца и найти те из групп автоморфизмов, которые являются шуровыми. Полученную при этом теоретико-групповую информацию можно использовать для получения комбинаторных результатов: перечисления графов, инвариантных относительно (G, N) , анализа

их групп автоморфизмов, установления условия изоморфизма таких графов, поиска графов с богатой симметрией и т. д.

Первые применения такого соответствия Галуа восходят к И. Шуру [21], рассматривавшему поставленную В. Берисайдом задачу характеристики абстрактных групп G , всякая примитивная подгруппа в $S(G)$ регулярного представления которых дважды транзитивна (впоследствии Г. Виланд назвал такие группы B -группами). И. Шур изучал целочисленное групповое кольцо $Z(G)$, изоморфное V -кольцу регулярного представления группы G . При этом клеточным подкольцам V -кольца соответствовали определенные подкольца в $Z(G)$, теперь называемые S -кольцами. Для некоторых классов абелевых групп И. Шуру удалось доказать, не перечисляя явно S -колец, что в каждом S -кольце найдется несвязный базисный граф, так что группа автоморфизмов S -кольца импримитивна. Отметим, что сам И. Шур пользовался другой терминологией. Современная формализация этого метода возникла в работах его учеников Г. Виланда [7] и Р. Кохендорфера [22]. Однако даже в классической монографии Г. Виланда [7] язык теории графов не используется. Например, простое утверждение о том, что примитивность группы подстановок эквивалентна связности всех ее антирефлексивных 2-орбит, впервые появилось только в 60-е годы в работах Д. Хитмана [23] и Ч. Симса [24].

Несмотря на то, что в последние десятилетия вышло немало работ, посвященных кольцам централизаторов, когерентным конфигурациям, схемам отношений и другим аналогам клеточных колец, идея использования соответствия Галуа между группами подстановок и клеточными кольцами еще не привлекла внимания широкого круга исследователей. Впервые, по-видимому, эта идея в явном виде сформулирована в работе Л. А. Калужнина и М. Х. Клина [4], где для некоторой бесконечной двухпараметрической серии V -колец доказано отсутствие нетривиальных клеточных подколец при достаточно больших значениях одного из параметров. Доказательство является составной частью обоснования максимальной одного класса групп подстановок в симметрических или знакопеременных группах. Обзор этих и последующих результатов о максимальных группах подстановок содержится в § 4.

Принципиально новым шагом в развитии метода V -колец стало полученное Р. Пешелем [25] описание решетки подколец V -кольца регулярной циклической группы Z_{p^k} , p простое, $p \neq 2$. Разработанная при этом техника позволила добиться определенного прогресса в изучении групп автоморфизмов циклических графов и в решении для них проблемы изоморфизма (см. § 5).

К сожалению, к настоящему времени лишь для немногих бесконечных серий групп подстановок удалось описать решетки подколец их V -колец. В большинстве случаев задача построения решетки подколец заданного клеточного кольца носит переборный характер и ее решение требует использования ЭВМ. § 6 по-

священ алгоритмическим вопросам вычислений в V -кольцах групп подстановок. Там же описан комплекс программ для построения и изучения решетки подколец V -кольца заданной транзитивной группы подстановок, который использовался при решении задач, о которых пойдет речь в последующих параграфах.

В § 7 рассматривается поставленная Н. Бигсом [26] задача описания автоморфных графов (дистанционно-транзитивных графов с примитивной группой автоморфизмов) диаметра не больше 5 и степени не более 13. Эта задача использована как «испытательный полигон» для отработки алгоритмической техники вычислений в V -кольцах групп подстановок, положенной в основу программ массового применения. С другой стороны, в ходе решения этой задачи разработан ряд приемов построения и идентификации автоморфных графов, что позволило перейти к систематическому изучению дистанционно-транзитивных графов малых степеней. Одно из массовых применений описанного в § 6 комплекса программ состояло в исследовании унипримитивных (примитивных, но не дважды транзитивных) представлений неабелевых простых групп порядка 10^6 . Некоторые результаты этих исследований приводятся в § 8.

Метод V -колец позволил по-новому взглянуть на некоторые известные задачи алгебраической теории графов. В частности, существенное продвижение было сделано в описании дистанционно-транзитивных графов (неориентированных графов, диаметр которых на единицу меньше ранга их группы автоморфизмов): получены оценки диаметра, найдены новые необходимые условия существования, разработаны методы перечисления таких графов малых степеней. Результаты этих исследований приведены в § 9. В § 10 сделан краткий обзор других результатов, имеющих отношение к клеточным кольцам и их применениям. § 11 содержит список некоторых нерешенных проблем.

§ 4. ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНЫХ ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК

Группа подстановок (G, N) на множестве N называется максимальной, если она — максимальная подгруппа симметрической группы $S(N)$ или знакопеременной группы $A(N)$ множества N . Интерес к задаче описания максимальных групп подстановок первоначально стимулировался ее связью с некоторыми вопросами многозначной логики [27]. Легко описываются максимальные интранзитивные и импримитивные группы подстановок степени n [27, 28]. Это прямые суммы групп S_k и S_l , $k + l = n$, и сплетения групп S_k и S_l , $kl = n$, соответственно.

Гораздо более сложна задача описания максимальных примитивных групп подстановок, еще весьма далекая от решения. Первая бесконечная серия таких групп была указана М. Х. Клином

[29]; полученный там результат затем обобщен в [4]. Рассмотренные в [4] индуцированные симметрические группы впоследствии изучались несколькими авторами и стали своего рода модельным объектом для разработки и апробации методов доказательства максимальности.

Пусть \tilde{S}_n^m обозначает действие симметрической группы S_n на множество P_n^m всех m -элементных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$. При $n \neq 2m$ группа (\tilde{S}_n^m, P_n^m) примитивна. В [4] доказано существование такой функции $d(m)$, что при $n > d(m)$ группа (\tilde{S}_n^m, P_n^m) максимальна в $S(P_n^m)$ или $A(P_n^m)$ в зависимости от четности биномиального коэффициента C_{n-2}^{m-1} . Доказательство этого асимптотического результата основано на методе инвариантных отношений и состоит из следующих этапов (с учетом уточнений, внесенных в [30]).

1. Описываются образующие V -кольца группы (\tilde{S}_n^m, P_n^m) ; ими являются графы Q_i , $0 \leq i \leq m$, с множеством вершин P_n^m и ребрами $(a, b) \in Q_i \Leftrightarrow |a \cap b| = i, a, b \in P_n^m$.

2. Доказывается, что

$$(\tilde{S}_n^m)^{(2)} = \text{Aut}(Q_{m-1}) = \begin{cases} \tilde{S}_n^m & \text{при } n \neq 2m, \\ \tilde{S}_n^m \times \langle \tau \rangle & \text{при } n = 2m, \end{cases}$$

где τ — подстановка на P_{2m}^m , переводящая каждое $a \in P_{2m}^m$ в его дополнение.

3. Устанавливается формула для вычисления структурных констант кольца $V(\tilde{S}_n^m)$:

$$\gamma_{ij}^k = \begin{cases} \sum_{l=s}^t C_k^l C_{m-k}^{j-l} C_{m-k}^{i-l} C_{n-2m+k}^{m-i-j+l} & \text{при } t \geq s, \\ 0 & \text{при } t < s, \end{cases}$$

где $s = \max(j+k-m, i+k-m, i+j-m, 0)$; $t = \min(i, j, k, n-3m+i+j+k)$.

При фиксированном m каждую структурную константу можно рассматривать как многочлен от n степени не выше m . Анализ этих многочленов позволяет показать существование такой функции $c(m)$, что при $n > c(m)$ у $V(\tilde{S}_n^m)$ нет нетривиальных подколец.

4. Из этого следует, что при $n > c(m)$ всякая надгруппа группы \tilde{S}_n^m в $S(P_n^m)$ дважды транзитивна. Используя оценки Маннинга для минимальной степени 2-транзитивных групп подстановок и учитывая, что минимальная степень возможных надгрупп группы \tilde{S}_n^m не превышает $2C_{n-2}^{m-1}$, удается показать, что при $n > 7m+1$ всякая кратно-транзитивная надгруппа группы \tilde{S}_n^m совпадает с $S(P_n^m)$ или $A(P_n^m)$. Положим теперь $d(m) = \max(c(m), 7m+1)$. Тогда при $n > d(m)$ группа \tilde{S}_n^m максимальная.

При всей простоте и наглядности такой схемы доказательства она обладает существенным недостатком: удастся указать лишь весьма грубую верхнюю оценку для $d(m)$. Нахождение точного значения $d(m)$ требует большого объема вычислений, быстро увеличивающегося с ростом m . М. Х. Клини [30] провел такие вычисления (частично с использованием ЭВМ) для $m = 2, 3, 4$. При $n > 2m + 1$ были найдены пары $(2, 6)$, $(2, 8)$, $(3, 10)$, $(4, 12)$ исключительных значений (m, n) , при которых \tilde{S}_n^m содержится в единственной нетривиальной надгруппе (2-транзитивной в первых трех случаях и унипримитивной в последнем). В ходе этих вычислений проводился поиск подколец в $V(\tilde{S}_n^m)$ при $3 \leq m \leq 6$. Было найдено несколько нешуровских подколец ранга 3, базисные элементы которых являются сильно-регулярными графами с параметрами (v, k, λ) , равными $(120, 56, 28)$, $(330, 63, 24)$ и $(1716, 833, 400)$. В. А. Устименко [31] с помощью ЭВМ провел поиск подколец ранга 3 в $V(\tilde{S}_n^m)$ в более широких пределах ($2 \leq m \leq 20$, $2 \leq n \leq 60$), однако никаких других сильнорегулярных графов не обнаружил.

Результаты проведенных вычислений усилили интерес к полному решению задачи описания надгрупп \tilde{S}_n^m . Э. Хальберштадт [32] решил эту задачу при $n \neq 2m$. В. А. Устименко [33], используя идеи Э. Хальберштадта, существенно упростил доказательство при $n \neq 2m$ и дал полное описание решетки надгрупп при $n = 2m$. Оказалось, что группа (\tilde{S}_n^m, P_n^m) при $n \neq 2m + 1$, $n \neq 2m$, $(m, n) \neq (2, 6)$, $(2, 8)$, $(3, 10)$, $(4, 12)$ максимальна. Если пара (m, n) принимает указанные четыре значения, имеется единственная нетривиальная надгруппа, изоморфная $\text{PGL}_i(2)$, $\text{Sp}_6(2)$, $\text{Sp}_8(2)$ или $O_{10}^-(2)$, соответственно. При $(m, n) = (2, 5)$ имеются две надгруппы, изоморфные S_6 и $\text{Aut}(S_6)$; при $m \geq 3$, $n = 2m + 1$ единственная надгруппа изоморфна S_{n+1} . Наконец, при $n = 2m$ решетка надгрупп более богата, причем все они примитивны. Полное доказательство этого результата содержится в [34], в [35] приведена выполненная под руководством Ч. Симса реконструкция доказательства по краткому изложению из [33]. Отметим, что полученные результаты представляют комбинаторный интерес, так как дают описание групп автоморфизмов подсхем схем отношений Джонсона [49] и графов биномиальных коэффициентов (см. [36]).

Ф. Харари [37] ввел операцию экспоненцирования группы подстановок (G, N) группой подстановок (H, M) , результат которой, обозначаемый $(G \uparrow H, N^m)$, $m = |M|$, абстрактно изоморфен (но не подобен) сплетению $H \wr G$ (см. также [38]). Задача описания решетки надгрупп экспоненцирования симметрических групп $(S_n \uparrow S_m, N^m)$ представляет интерес в алгебраической теории кодирования, так как базисные графы V -колец этих групп образуют классическую схему Хэмминга [19].

Первая попытка доказательства асимптотической максимальной группы $(S_n \uparrow S_m, N^m)$ по схеме [4] была предпринята

Б. А. Ромовым [39]. Однако явные формулы для структурных констант найдены не были; поэтому, по-видимому, приведенные там результаты оказались некорректными. М. Х. Клиш [40] указал формулы для структурных констант $V(S_n \uparrow S_m)$ и опроверг утверждение из [39] о максимальной $S_3 \uparrow S_m$ и $S_4 \uparrow S_m$ при достаточно больших m . В. А. Устищенко [34, 41, 42] и В. А. Зайченко [43, 44] с помощью ЭВМ нашли некоторые подкольца в $V(S_n \uparrow S_m)$ при $n = 2, 3, 4$ и небольших m . Анализ этих результатов позволил выдвинуть гипотезу о существовании бесконечных серий сильнорегулярных графов, инвариантных относительно $S_n \uparrow S_m$. Для $n = 2, 3$ эта гипотеза доказана В. А. Устищенко [42, 45]. При $n = 4$ существование аналогичной серии доказал М. Х. Клиш [40]. Оценка значений (m, n) , при которых $V(S_n \uparrow S_m)$ не имеет нетривиальных подколец, выполнена по схеме [4] Д. Джоунсом и К. Соумро [46], которые, по-видимому, не были знакомы с работами [39, 40] и последующими публикациями. В последнее время М. Е. Муzychuk описал решетку подколец $V(S_2 \uparrow S_m)$ и вместе с В. А. Устищенко анонсировал описание решетки подколец $V(S_3 \uparrow S_m)$. Максимальность группы $(S_n \uparrow S_m, N^m)$ при $n > 4$ доказана В. А. Устищенко [34, 47] с помощью разработанной им техники p -локального анализа на инвариантных отношениях.

Результаты исследования 2-параметрических серий групп подстановок (\tilde{S}_n^m, P_u^m) и $(S_n \uparrow S_m, N^m)$ показали, что метод V -колец можно успешно применять как для установления решетки надгрупп заданной группы подстановок в симметрической группе, так и для поиска комбинаторных объектов, инвариантных относительно изучаемой группы. Из результатов такого рода отметим анонсированную В. А. Устищенко [48] теорему о том, что V -кольцо группы $\text{PGL}_n(q)$, действующей на грассманиане $\Gamma_n^m(q)$, $m > 2$, не имеет нетривиальных подколец при $q > \max(c(m), C_n^m)$, где $c(m)$ — функция, введенная при рассмотрении группы \tilde{S}_n^m .

В последние годы в связи с гипотезой о полноте списка известных конечных простых групп резко возрос интерес к задаче о максимальных группах подстановок. Л. Скотт и М. О'Нан (см. [49]) получили необходимые условия максимальной примитивной группы подстановок. При этом наиболее труднообозрим случай полного нормализатора в S_n примитивной простой неабелевой группы степени n . Самым разработанным инструментом для исследования на максимальность серий находящихся «под подозрением» примитивных групп подстановок является созданный В. А. Устищенко [33, 50] метод p -локального анализа на инвариантных отношениях. В настоящее время этот метод с успехом применяется к группам Шевалле, действующим на смежных классах по максимальным параболическим подгруппам [51, 52]. На наш взгляд, метод V -колец и p -локальный анализ хорошо дополняют друг друга. Метод p -локального анализа не исключает использования комбинаторных вычислений (см. [51]); к тому же его применение к спорадическим примитивным представлениям,

которые не вкладываются в бесконечные серии единообразно трактуемых примитивных групп подстановок, весьма затруднительно. В то же время счет в V -кольцах позволяет в качестве «побочного продукта» получить информацию о конкретных графах, часто не менее ценную, чем доказательство максимальности или установление вложения одной группы в другую. Так как по модулю классификации простых групп все кратно-транзитивные группы известны (см. [53]), наибольший интерес представляют вопросы вложения унипримитивных групп, которые могут быть изучены техникой V -колец.

§ 5. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

Пусть $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ — система вычетов по модулю n , (Z_n, Z_n) — регулярная циклическая группа порядка n и степени n , порожденная подстановкой $(0, 1, \dots, n-1)$. Базисные графы $V(Z_n)$ будем обозначать $0, \underline{1}, \dots, \underline{n-1}$, где $(x, y) \in k \Leftrightarrow y - x = k$ при $k, x, y \in Z_n$. Легко видеть, что $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i+j}$, поэтому $V(Z_n)$ изоморфно групповому кольцу $Z(Z_n)$. Подкольца $Z(Z_n)$, соответствующие клеточным подкольцам $V(Z_n)$, называют, следуя Г. Виланду [7], S -кольцами над Z_n .

Р. Пешель [25] сопоставил каждому S -кольцу над Z_n инвариант, называемый S -системой. Пусть $P(n) = \{\mu \in Z_n : (\mu, n) = 1\}$. Хорошо известно, что $P(n)$ является группой относительно умножения. Пусть W — S -кольцо над Z_n , через $T(\underline{d})$ для $\underline{d} \in Z_n$ обозначим базисный элемент кольца W , содержащий граф \underline{d} . Если $T = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \dots + \underline{x}_k = \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$ и $\mu \in P(n)$, положим $\mu T = \underline{\mu x}_1, \underline{\mu x}_2, \dots, \underline{\mu x}_k$. Ясно, что множество $\text{St}(T) = \{\mu \in P(n) : \mu T = T\}$ образует подгруппу мультипликативной группы $P(n)$. Пусть $D(n) = \{1 = d_1, d_2, \dots, d_l\}$ — множество всех натуральных делителей n , отличных от n . S -системой, соответствующей S -кольцу W , называется пара $(\rho, b = (b_1, \dots, b_l))$, где $b_i = \text{St}(T(\underline{d}_i))$, $1 \leq i \leq l$, а ρ — эквивалентность на $D(n)$: $d_i \rho d_j \Leftrightarrow \exists \mu \in P(n) : \underline{d}_j \in T(\underline{d}_i)$. Оказалось, что при $n = p^k$, p простое, $p \neq 2$, S -кольцо однозначно восстанавливается по S -системе, что позволило Р. Пешелю получить при этих значениях n полное описание решетки S -колец над Z_n .

Н. Л. Наймарк [54] разработала программу для ЭВМ, с помощью которой были найдены все S -кольца над Z_{2^k} при $1 \leq k \leq 6$. Реализованный в программе алгоритм сводится к поиску всех кандидатов в S -системы, восстановлению соответствующих разбиений Z_n и проверке, какие из них являются S -кольцами. При $k = 6$ для сокращения перебора программа использовалась в диалоговом режиме. Анализ полученных результатов позволил сформулировать гипотезу о строении всех S -колец над Z_{2^k} , которая доказана в [55].

С использованием техники S -систем удалось также перечислить все S -кольца над Z_{pq} , где p, q простые [5, 56]. Я. Ю. Гольфанд анонсировал описание всех S -колец над Z_n (где n свободно от квадратов), опирающееся на классификацию в терминах конечных топологий эквивалентностей ρ , появляющихся в S -системах таких S -колец.

Задача описания S -колец над Z_n тесно связана с проблемой изоморфизма циклических графов — графов с множеством вершин $\{0, 1, \dots, n-1\}$, инвариантных относительно подстановки $(0, 1, \dots, n-1)$. Циклический граф можно отождествить с подмножеством $\Gamma \subseteq Z_n$ таким, что (x, y) — дуга графа тогда и только тогда, когда $x - y \in \Gamma$. Граф Γ — неориентированный, если $k \in \Gamma \Rightarrow n - k \in \Gamma$. Легко проверить, что для $\mu \in P(n)$ графы Γ и $\mu\Gamma$ изоморфны. А. Адам [57] предположил, что циклические графы Γ и Γ' изоморфны тогда и только тогда, когда $\exists \mu \in P(n) : \Gamma' = \mu\Gamma$ (условие Адама). Хотя к гипотезе Адама вскоре были построены контрпримеры как в ориентированном (при $n=8$), так и в неориентированном (при $n=16$) случаях, задача установления критерия изоморфизма циклических графов привлекла большое внимание (см. библиографию в [58]).

Нетрудно показать, что при $n=p$, p простое, условие Адама необходимое и достаточное. Сложнее доказать такое утверждение при $n=pq$, p, q простые. Для этого наиболее естествен метод, основанный на использовании S -колец [56]. Оказывается, все S -кольца над Z_{pq} шуровы и попарно неизоморфны. Описываются группы автоморфизмов всех S -колец и проверяется, что в любом смежном классе нормализатора в S_{pq} группы автоморфизмов G любого S -кольца над Z_{pq} по G содержится подстановка $x \rightarrow \mu x$, где $\mu \in P(n)$. Это как раз и означает необходимость и достаточность условия Адама для изоморфизма циклических графов с pq вершинами. Донная схема была применена для нахождения критерия изоморфизма при $n=p^2$ [56]. При $n=p^m$, $m \geq 3$, реализация этой схемы становится затруднительной, поэтому в [58] М. Х. Клини и Р. Пешель дали прямое обоснование критерия изоморфизма циклических графов с p^m , $p \neq 2$ вершинами, не использующее в явном виде теорию S -колец; вся необходимая информация из [25] о строении базисных величин S -колец над Z_{p^m} представлена на теоретико-числовом уровне. К сожалению, такой метод изложения оказался менее наглядным. В случае n , свободного от квадратов, необходимость условия Адама анонсирована В. Н. Егоровым и А. И. Марковым [59]. Этот же результат следует из анонсированного Я. Ю. Гольфандом описания S -колец над Z_n , n свободно от квадратов.

§ 6. АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ В V -КОЛЬЦАХ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

Рассмотренные в двух предыдущих параграфах результаты в основном получены на теоретическом уровне. Проводимые при этом вычисления носили вспомогательный характер: либо поз-

воляли уточнить ситуацию для исключительных значений параметров исследуемых серий V -колец [30], либо давали экспериментальный материал для выработки гипотез [41, 44, 54], которые затем обосновывались без вычислений. Опыт таких вычислений, с одной стороны, показал необходимость и оправданность привлечения ЭВМ для их реализации, а с другой — поставил вопрос о создании программных средств для проведения на ЭВМ всех рутинных этапов работы по изучению V -кольца заданной группы подстановок: синтезу V -кольца, перечислению клеточных подколец и вычислению их групп автоморфизмов.

Первый достаточно полный набор программ для проведения таких вычислений, разработанный В. А. Зайченко [43, 44], позволил решить ряд задач, о некоторых из которых пойдет речь в § 7 и 10.4. Опыт разработки и реализации программ лег в основу программного комплекса для массового исследования V -колец транзитивных групп подстановок, созданного И. А. Фараджем [13, 60]. Этот комплекс использовался для изучения примитивных представлений неабелевых простых групп (§ 8), идентификации некоторых дистанционно-транзитивных графов (§ 9), построения бипримитивных несогласованных графов (10.3), перечисления примитивных графов (10.6). В настоящее время этот комплекс применяется для решения ряда других задач.

Алгоритмы вычисления в V -кольцах групп подстановок в рамках описанной в § 3 схемы можно разделить на три функциональные группы:

алгоритмы синтеза V -кольца заданной группы подстановок, т. е. определения ее ранга и подстепеней, построения базисных графов и вычисления структурных констант;

алгоритмы перечисления всех подколец заданного клеточного кольца или подколец со специальными свойствами (например, примитивных подколец, клеток, подколец заданного ранга, с заданными подстепенями или структурными константами);

алгоритмы определения групп автоморфизмов клеточных колец.

При решении некоторых задач с использованием метода V -колец нет необходимости привлечения ЭВМ для глобальных вычислений по описанной универсальной схеме. Иногда некоторые их этапы проще и эффективнее проводить либо вручную, либо используя специализированные программы, учитывающие структуру исследуемых групп и специфику решаемой задачи.

Хорошо известно, что ранг группы (G, N) можно вычислить по кратностям неприводимых характеров в разложении подстановочного характера. Вычисление подстепеней группы требует привлечения более богатой локальной информации о ее строении (см. 10.8). Для описания 2-орбит группы подстановок локальной информации становится недостаточно. Для синтеза V -колец некоторых серий хорошо изученных групп подстановок разумно применять специализированные, быстро работающие программы. М. Х. Клиш [20] описал 2-орбиты и вывел формулы для вычис-

ления структурных констант V -колец групп \tilde{S}_n^m и $S_n \uparrow S_m$. В. А. Устименко получил в [34] аналогичные формулы для группы $\text{PGL}_n(q)$, действующей на грассманиане $\Gamma_n^m(q)$. В. В. Ждан-Пушкин и В. А. Устименко [64] анонсировали формулы для структурных констант классических групп, действующих на максимальных изотропных подпространствах.

При синтезе V -кольца произвольной группы подстановок первоепенное значение приобретает «имя» (в семиотическом смысле), с помощью которого задается группа [62, 63]. Весьма удобное для машинной обработки задание группы сильной (Ч. Симс [64]) или стандартной (И. А. Фараджев [63]) системами образующих из-за огромного объема исходных данных при большой степени группы может заставить исследователя отказаться от работы с ЭВМ. Использование системы образующих подстановок в качестве исходных данных для синтеза V -кольца требует программной генерации этих образующих при сколько-нибудь большой степени группы (несколько десятков и более). При выборе способа построения образующих подстановок транзитивного представления группы G по ее подгруппе H возможны три ситуации.

1. Необходимое представление хорошо известно, требуется лишь переформулировка на входной язык программы синтеза V -кольца. В этом случае уместно использовать специализированные программы генерации образующих подстановок. Так, М. Е. Иофинова написала соответствующую программу для примитивных представлений группы $\text{Sz}(8)$, а Я. Ю. Гольфанд — для $\text{PSL}_2(q)$ по параболическим подгруппам.

2. Известны порождающие элементы и определяющие соотношения для группы G и совокупность слов от этих элементов, порождающая подгруппу H , либо известны некоторое подстановочное представление группы G на множестве N и действие на нем подгруппы H . В первом случае можно использовать для получения образующих подстановок хорошо известный метод Тодда — Коксетера [65]. Во втором случае задача решается (М. Х. Клини [42]) рассмотрением индуцированного действия группы G на орбите U^G отношения U , инвариантного относительно подгруппы H , но не инвариантного любой подгруппе $H' \cong H$. Это действие будет подобно искомому подстановочному представлению, его образующие получаются из образующих исходного представления индуцированием на орбите U^G . В комплексе [60] реализовано индуцирование на унарных (циклических графах) и бинарных отношениях специального вида (разбиениях). Нетрудно видеть, что индуцирование на симметрических отношениях произвольной ариности можно свести к двукратному индуцированию на унарных отношениях.

3. Известно интранзитивное действие подгруппы H в искомом представлении, а полная информация о группе G отсутствует. В этом случае искомое представление можно получить методом

транзитивного расширения подгруппы H . Техника транзитивного расширения, основанная на перечислении подклеток V -кольца интранзитивной группы, описана далее. Именно таким способом А. А. Иванов [12], следуя Д. Ливингстону [66], получил представление группы Янко J_1 по подгруппе $PSL_2(11)$.

После того как тем или иным путем получены образующие подстановки изучаемого представления, можно приступить к построению базисных графов. Разбиение множества $N \times N$ на 2-орбиты группы (G, N) удобно интерпретировать как полный ориентированный цветной граф, дуга (a, b) которого окрашена в цвет k , когда $(a, b) \in Q_k$. Если транзитивная группа задана произвольной системой образующих, построение матрицы смежности цветного графа производится в два этапа. Сначала генерируются образующие фиксатора G_1 точки 1 в группе G , с помощью которых строится первая строка матрицы, и находятся представители смежных классов G по G_1 в виде слов от образующих. Затем действием представителей смежных классов на первую строку вычисляются все остальные строки матрицы смежности цветного графа. Наиболее трудоемкой частью этого алгоритма является генерация образующих фиксатора точки. Трудоемкость существенно снижается, если в системе порождающих подстановок явно выделена подсистема, порождающая фиксатор точки. В комплексе программ [60] реализованы оба описанных способа, которые позволяют при разумных требованиях к памяти и времени работы ЭВМ строить базисные графы V -кольца транзитивной группы степени до 10^4 . Следует отметить, что и алгоритм Толда — Коксера и индуцирование позволяют в принципе получить в качестве побочного продукта образующие фиксатора точки. Степень доступных для обработки групп можно повысить еще на порядок, если ограничиться построением первой строки матрицы смежности цветного графа и представителей смежных классов в виде слов от образующих, а остальные строки матрицы смежности вычислять по мере надобности (в процессе вычисления структурных констант и определения группы автоморфизмов).

Вычисление структурных констант основано на описанной в § 2 геометрической интерпретации. В случае транзитивной группы для этого достаточно подсчитать число треугольников вида $(1, b, c)$ с разными способами окраски, где b пробегает представителей орбит фиксатора точки 1, а c — множество N . В комплексе [60] реализован экономный алгоритм, предложенный В. А. Зайченко [44], позволяющий получить все структурные константы за один просмотр матрицы смежности цветного графа. Проверку связности антирефлексивных базисных графов можно произвести, используя в качестве входной информации только структурные константы. Базисным графам Q_i , $1 \leq i \leq r-1$, поставим в соответствие неориентированные графы F_i с множеством вершин $\{1, \dots, r-1\}$, такие что (j, k) — ребро в F_i , если хотя бы одна из структурных констант с множеством индексов

$\{i, j, k\}$ отлична от нуля. Легко проверить, что F_i связан тогда и только тогда, когда связан соответствующий граф Q_i . Кроме установления примитивности группы информация, полученная в процессе определения связности базисных графов, позволяет сократить перебор при поиске примитивных подколец V -кольца импримитивной группы, а также распознавать кольца, порожденные графами максимального диаметра.

Построение всех клеточных подколец V -кольца группы G с базисными графами Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} — центральный и в то же время самый трудоемкий шаг в реализации описанной схемы. Пусть $\{Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{s-1}\}$ — разбиение множества $Q = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1}\}$, порождающее подкольцо кольца $\langle Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} \rangle$.

Тогда $Q'_i Q'_j = \sum_{k=0}^{s-1} \mu_{ij}^k Q'_k$, в частности $(Q'_i)^2 = \mu_{ii}^i Q_i + \sum_{k \neq i} \mu_{ii}^k Q'_k$. Назовем подмножество $Q'_i = \{Q_{i_1}, \dots, Q_{i_l}\}$ множества Q «хорошим», $(Q'_i)^2 = \lambda(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_l}) + \sum_{k \neq i} \delta_{ii}^k Q_k$. «Хорошими», в частности,

могут быть все одноэлементные подмножества и само множество Q . Очевидно, что только «хорошие» множества могут быть базисными графами клеточных подколец. М. Х. Клин [30] предложил для перечисления подколец клеточного кольца $\langle Q \rangle$ перебирать все подмножества Q и выделять из них «хорошие», а затем составлять из «хороших» подмножеств всевозможные разбиения множества Q и проверять, являются ли они клеточными кольцами. Перебор можно несколько сократить, перебирая только симметричные (состоящие только из самообратных и пар взаимно обратных графов) и антисимметричные (состоящие из несамообратных, попарно не взаимно обратных графов) подмножества. Причем для того чтобы антисимметричное множество было «хорошим», должно быть «хорошим» также множество из обратных графов. Кроме того, перед синтезом разбиений «хорошие» множества можно еще отбраковывать, возводя их в более высокие степени. Реализация в [60] описанного алгоритма позволяет находить все подкольца кольца, симметризованный ранг \bar{r} (сумма числа самообратных и пар взаимно обратных базисных графов) которой не превосходит 30. Во всех решенных нами задачах с примитивными группами подстановок количество «хороших» множеств было существенно меньше $2^{\bar{r}}$, так что составление из них разбиений и проверка на получение клеточных колец не занимали много времени. Перебор на этом этапе можно еще уменьшить при поиске подколец специального вида: подколец ранга 3 и подколец, связанных с симметрическими блок-схемами (В. А. Устименко [31]), а также примитивных подколец импримитивного клеточного кольца (см. 10.6). Ограничение ранга клеток, к которым можно применить описанный алгоритм, связано с необходимостью полного перебора при отборе «хороших» множеств. Косвенным свидетельством в пользу того, что этот перебор не может быть элиминирован, является существование беско-

нечной серии V -колец, каждое подмножество базисных графов которого «хорошее» (см. 10.7).

Другой подход, предложенный М. Х. Клином и развитый А. А. Ивановым, используется при поиске клеточных подколец специального вида в V -кольце интранзитивной группы с целью построения ее транзитивного расширения. Пусть (H, N) — интранзитивная группа подстановок с орбитами $N_0 = \{x\}$, N_1, \dots , N_{r-1} , так что $\bigcup_{i=0}^{r-1} N_i = N$. Транзитивная группа подстановок

(G, N) называется транзитивным расширением группы (H, N) , если фиксатор G_x точки x в G совпадает с H . Очевидно, что $V(G)$ является подкольцом $V(H)$, однако для построения транзитивного расширения необходимо строить не все подкольца $V(H)$, а только специального вида — клетки с подстепенями $|N_0|$, $|N_1|, \dots, |N_{r-1}|$. Пусть $\Psi_p(s, t)$, $0 \leq s, t \leq r-1$, — совокупность всех 2-орбит группы (H, N) , так что $\bigcup_p \Psi_p(s, t) = \{(a, b) : a \in N_s, b \in N_t\}$, и пусть Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} — 2-орбиты ее транзитивного расширения (G, N) , занумерованные так, что $(x, a) \in Q_i$ при $a \in N_i$. Тогда

$$Q_0 = \sum_{i=0}^{r-1} \Psi_0(i, i), \quad Q_j = \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{t=0}^{r-1} \sum_p \alpha(j, p, s, t) \Psi_p(s, t),$$

где $\alpha(j, p, s, t) = \{0, 1\}$ и $\sum_{j=0}^{r-1} \alpha(j, p, s, t) = 1$ при любых p, s, t . Условие на подстепени искомой клетки $d(Q_j) = |N_j|$ можно переписать в виде $\sum_{t=0}^{r-1} \sum_p \alpha(j, p, s, t) d(\Psi_p(s, t)) = |N_j|$ для любых j, s . Это соотношение позволяет резко сократить перебор разбиений множества $\{\Psi_p(s, t)\}$. Величина $\sum_p \alpha(j, p, s, t) d(\Psi_p(s, t))$ представляет собой структурную константу γ_{ij}^s искомого кольца $V(G)$, где $Q_{j'} = Q_j^{-1}$. Это влечет за собой возможность еще большего сокращения перебора в случае, когда известны структурные константы искомого кольца, например при построении дистанционно-транзитивных графов с заданным массивом пересечений (см. § 7, 9). Заметим, что клетка W , базисные графы которой удовлетворяют приведенным условиям, может не быть V -кольцом транзитивного расширения группы (H, N) ; в этом случае либо клетка W нешурова, либо фиксатор $\text{Aut}_x(W)$ точки x в ее группе автоморфизмов не совпадает с (H, N) . Описанный алгоритм пока не реализован программно, но многочисленные примеры его использования «вручную» дали обнадеживающие результаты.

Алгоритм вычисления группы автоморфизмов клеточного кольца, реализованный в [60], основан на понятиях базы и сильной системы образующих группы подстановок, введенных Ч. Симсом

[64]. Этот алгоритм обобщает технику, примененную в [67—69], для нахождения канонической нумерации вершин графа, и строит сильную систему образующих специального вида, названную квазистандартной. Она возникает при просмотре элементов группы подстановок в лексикографическом порядке, индуцированном линейным упорядочением элементов базы, к отбору тех, которые не содержатся в подгруппе, порожденной всеми предшествующими элементами. В такой системе число образующих не превосходит $n - 1$, а для унипримитивных групп оно обычно существенно меньше.

Квазистандартная система образующих удобна для дальнейшего использования: по ней, как и по любой сильной системе, легко, например, вычислить порядок группы, определить фиксатор точки, найти представителей смежных классов по этому фиксатору и т. д. Вычисление групп автоморфизмов всех элементов построенной решетки подколец начинается с колец наибольшего ранга, причем, если $W > W'$, для вычисления $\text{Aut}(W')$ используется информация о ранее вычисленной ее подгруппе $\text{Aut}(W)$. Теоретическая оценка трудоемкости использованного алгоритма экспоненциальна, однако опыт его массового применения для вычисления групп автоморфизмов примитивных клеточных колец не обнаружил более чем квадратичной зависимости времени работы от степени группы.

Шуровость клеточного кольца, входящего в решетку подколец некоторого V -кольца, может быть диагностирована по порядкам вычисленных групп автоморфизмов. А именно: кольцо W нешурово тогда и только тогда, когда существует кольцо $W' > W$ с $\text{Aut}(W') = \text{Aut}(W)$. Следует отметить, что иногда удается определить нешуровость клеточного кольца чисто комбинаторными вычислениями (см. 10.2).

Информация, полученная в ходе обработки на ЭВМ группы подстановок по описанной схеме (матрицы смежности базисных графов ее V -кольца, структурные константы, описание базисных графов ее подколец в терминах «склейки» базисных графов исходного кольца, системы образующих групп автоморфизмов), хотя и представляет самостоятельный интерес, не может быть доведена до широкого круга пользователей вследствие ее необозримости. В связи с этим возникает задача представления и интерпретации результатов, полученных в ходе вычислений на ЭВМ.

С теоретико-групповой точки зрения итогом этой работы является решетка 2-замкнутых надгрупп группы (G, N) в $S(N)$. При этом возникает новая теоретико-групповая задача идентификации групп автоморфизмов подколец по значению их порядков и известной подгруппе G . Приемы такой идентификации в случае, когда G — простая группа, рассмотрены в § 8.

Каждое найденное клеточное кольцо является интересным комбинаторным объектом, заслуживающим специального изучения. Желательно дать независимую от ЭВМ комбинаторную интерпретацию всех базисных графов изучаемого кольца, т. е. до-

статочно компактно описать множества вершин и ребер этих графов. Компактность такого описания часто зависит от удачного способа представления (нумерации, кодирования) вершин графа. Немалую роль в оценке конечного результата играют эстетические соображения. Некоторые подходы, применяемые при такой идентификации, намечены в [13].

§ 7. ЗАДАЧА БИГСА ОБ АВТОМОРФНЫХ ГРАФАХ

Пусть $W = \langle Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} \rangle$ — клеточное кольцо, $\Gamma = Q_1$ — неориентированный регулярный степени k базисный граф на n вершинах диаметра $r-1$, x — произвольная вершина, $\Gamma_j(x)$, $0 \leq j \leq r-1$ — множество вершин на расстоянии j от x в естественной метрике графа Γ . Можно показать, что числа $c_j = |\Gamma_{j-1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$, $1 \leq j \leq r-1$; $b_j = |\Gamma_{j+1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$, $0 \leq j \leq r-2$ не зависят от выбора вершин x и $y \in \Gamma_j(x)$. Граф, обладающий такими свойствами, называют дистанционно-регулярным (д. р. г.). И наоборот: каждый д. р. г. диаметра d порождает клеточное кольцо $\langle Q_0, \Gamma, \Gamma^2, \dots, \Gamma^d \rangle$ ранга $r = d+1$. Шуровость этого кольца эквивалентна транзитивности действия группы автоморфизмов д. р. г. на упорядоченных парах равноудаленных вершин. В этом случае д. р. г. называют дистанционно-транзитивным графом (д. т. г.). Д. т. г. с примитивной группой автоморфизмов называют автоморфным графом (а. г.). Набор параметров $i(\Gamma) = (k, b_1, \dots, b_{d-1}; 1, c_2, \dots, c_d)$ называют массивом пересечений д. р. г. Γ степени k и диаметра d . Д. р. г. диаметра 2 называют сильнорегулярным графом (с. р. г.). В этом случае обычно используют параметры $v = n$, k , $l = v - k - 1$, $\lambda = k - c_1 - b_1$, $\mu = c_2$.

Изучению д. р. г., д. т. г. и а. г. посвящена обширная литература; упомянем лишь монографию Н. Бигса [70] и обзор А. Козна [71]. Центральным в этой области является вопрос существования а. г. (д. т. г., д. р. г.) с заданным массивом пересечений. Данная задача — частный случай более общей задачи существования примитивного V -кольца (V -кольца, клеточного кольца) с заданными структурными константами.

Помимо эстетических соображений, связанных с богатой симметрией д. т. г., интерес к изучению д. т. г., особенно а. г., стимулируется их значением в алгебраической теории кодирования и теории конечных групп. Описаны все д. т. г. степени 3 и 4; их соответственно 12 и 15 (см. ссылки в [72]). Известен ряд условий, которым должны удовлетворять массивы пересечений д. р. г. [26]. Простейшим из них является требование целочисленности величин $|\Gamma_j(x)| = (kb_1 \dots b_{j-1}) / (c_2 c_3 \dots c_j)$, а наиболее сложным — обобщенное условие Крейна, которое формулируется в терминах собственных чисел и векторов матриц, составленных из

№ массива	Число вершин	Диаметр	Массив пересечений	Существование	Порядок Aut(Γ)	Минимальный норм. дел.
1	231	3	(10, 8, 7; 1, 1, 4)	Нет	—	—
2	65	3	(10, 6, 4; 1, 2, 5)	Да	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$	$PSL_2(25)$
3	210	3	(11, 10, 4; 1, 1, 5)	Нет	—	—
4	208	3	(12, 10, 5; 1, 1, 8)	Да	$2^8 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$	$PSU_3(4)$
5	88	3	(12, 10, 2; 1, 2, 8)	Нет	—	—
6	68	3	(12, 10, 3; 1, 3, 8)	Да	$2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$	$PSL_2(16)$
7	364	3	(12, 9, 9; 1, 1, 4)	»	$2^6 \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 13$	$C_2(3)$
8	1755	4	(10, 8, 8, 8; 1, 1, 1, 5)	»	$2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$	${}^2F_4(2)'$
9	315	4	(10, 8, 8, 2; 1, 1, 4, 5)	»	$2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$	J_2
10	2925	4	(12, 8, 8, 8; 1, 1, 1, 3)	»	$2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$	${}^2F_4(2)'$
11	525	4	(12, 8, 6, 4; 1, 1, 2, 9)	Нет	—	—

структурных констант клеточного кольца, порожденного д. р. г. и его степенями. Если д. р. г. есть д. т. г. или даже а. г., то на его массив пересечений налагаются дополнительные условия.

Н. Бигсом и его коллегами [26] был предпринят поиск с помощью ЭВМ всех массивов пересечений а. г. диаметра $d \leq 5$ и степени $k \leq 13$. В результате вычислений из более чем миллиона возможных массивов отобрано около 60. Часть из них соответствует интенсивно изучавшимся графам ранга 3 или членам нескольких хорошо известных серий а. г. Оставшиеся 24 массива соответствуют диапазону $3 \leq d \leq 5$, $3 \leq k \leq 13$. Семь из них соответствуют известным а. г., причем вопросы единственности Н. Бигсом не рассматривались. В шести случаях удалось показать несуществование соответствующих а. г. Вопрос о существовании а. г. с оставшимися 11 массивами пересечений (табл. 1) оставался открытым. Задача Бигса в течение нескольких лет была пробным камнем для испытания новых подходов к исследованию а. г. и привлекла внимание нескольких научных коллективов. Полное ее решение получено в 1979—1981 гг. В. А. Зайченко, А. А. Ивановым, М. Х. Клином и И. А. Фараджевым. Частичная информация об этой работе содержится в [43, 44, 63, 73], окончательные результаты анонсированы в [6, 74].

Оказалось, что для четырех массивов пересечений не существует а. г. (для одного из них даже д. р. г.), а г., соответствующие оставшимся семи массивам, существуют и единственны. Для этих графов вычислены порядки групп автоморфизмов и охарактеризованы их минимальные нормальные делители, оказавшиеся известными простыми группами. Независимо задача Бигса решена в [75—77], причем подход к доказательству существования в этих работах существенно отличается от нашего. Так, в [76, 77] предложены красивые геометрические конструкции,

приводящие в некоторых случаях к бесконечным сериям д. р. г. Тот факт, что этих конструкций оказалось достаточно для построения всех искомых графов, в известной мере дело случая. В то же время подход, использованный нами, с неизбежностью приводит либо к доказательству несуществования а. г., либо к построению всех а. г. с заданным массивом пересечений.

Приведем схему наших исследований. Если существует а. г. Γ с заданным массивом пересечений, то $|\text{Aut}(\Gamma)|$ ограничен снизу и сверху функциями от параметров массива пересечений. Ограничение снизу следует из требования транзитивности действия $\text{Aut}_x(\Gamma)$ на всех $\Gamma_j(x)$, а сверху — вытекает из точности действия $\text{Aut}_x(\Gamma)$ на каком-либо $\Gamma_j(x)$ или из оценки мощности ядра такого действия. Известно [53]: если число вершин n графа Γ не простое и $n \neq m^r$, $r > 1$, то $H \triangleleft \text{Aut}(\Gamma) \cong \text{Aut}(H)$, где H — неабелева простая группа. Имея полные списки неабелевых простых групп достаточно большого порядка, можно выделить всех кандидатов на роль минимального нормального делителя группы автоморфизмов искомого графа. Для каждого такого кандидата H рассмотрим все примитивные представления степени n всех групп $G: H \triangleleft G \cong \text{Aut}(H)$ и в решетке их V -колец выделим подкольца с заданными структурными константами, порождаемые базисными графами максимального диаметра. Эти графы, и только они, будут а. г. с заданным массивом пересечений. Таким способом были изучены массивы пересечений 4, 6 и 9 из списка Биггса, исходя из примитивных представлений групп $\text{PSU}_3(4)$, $\text{PSU}_2(16)$ и J_2 . Здесь использовались списки простых групп H с $|\text{Syl}_2(H)| \leq 2^{10}$ [78]. Описанный подход универсален, однако требует привлечения большой информации о неабелевых простых группах, а при больших порядках опирается на гипотезу о завершении их классификации. В процессе решения задачи Биггса нами использовано несколько менее универсальных методов.

В одном из них применяется техника транзитивного расширения. Воспользовавшись ограничениями на $|\text{Aut}(\Gamma)|$ и располагая списками транзитивных групп подстановок малых степеней (например, [79]), иногда удается описать все возможные варианты абстрактного строения фиксатора $\text{Aut}_x(\Gamma)$ вершины x в группе $\text{Aut}(\Gamma)$ а. г. Γ с заданным массивом пересечений. Для каждого варианта группы $\text{Aut}_x(\Gamma)$ определим ее действия на орбитах требуемой длины $|\Gamma_j(x)|$, вычислим подстановочные характеры этих действий и проверим, можно ли их продолжить до подстановочных характеров транзитивной группы. В V -кольце интранзитивной группы, удовлетворяющей этому условию, найдем все подкольца с заданными структурными константами и транзитивной группой автоморфизмов. Базисные графы максимального диаметра подколец дают полное решение поставленной задачи. Этим методом построены а. г. с массивами пересечений 2, 6 и доказано несуществование а. г. с массивами пересечений 3, 5.

Более частные методы, использованные нами при решении задачи Биггса, основаны на раздельном решении вопросов о су-

ществовании и единственности а. г. с заданным массивом пересечений. Группа $G_2(3)$, по оценкам порядка, может служить минимальным нормальным делителем в группе автоморфизмов а. г. с массивом пересечений 7. С помощью геометрической конструкции, восходящей к работе Л. Диксона [80], построен а. г. с искомыми параметрами, инвариантный относительно действия $G_2(3)$ на максимальных параболических подгруппах. Явное построение этого графа позволило обнаружить, что порядок его группы автоморфизмов вычислен неверно как в работе [75], так и в нашей предварительной публикации [74]. Дело в том, что исходя из двух классов сопряженности максимальных параболических подгрупп в $G_2(3)$, можно построить два изоморфных а. г. с требуемыми параметрами. Изоморфизм этих графов осуществляется внешним автоморфизмом группы $G_2(3)$, который не является их автоморфизмом. Доказательство существования а. г. с массивами пересечений 8 и 10 получено без их явного построения. Оно основано на использовании леммы, доказываемой методом V-колец.

Лемма. Пусть (G, N) — примитивная группа подстановок с подстепенями $1 = n_0, n_1, \dots, n_d$, причем $n_i > n_1 \cdot n_{i-2}$ при $2 \leq i \leq d$. Тогда существует инвариантный относительно G а. г. Γ с $n = |N|$ вершинами диаметра d , у которого $|\Gamma_i(x)| = n_i, 1 \leq i \leq d$.

Единственной неабелевой простой группой, претендующей на роль минимального нормального делителя $\text{Aut}(\Gamma)$ а. г. Γ с массивами пересечений 8 и 10, является группа Титса ${}^2F_4(2)'$ [81]. У нее есть два класса неизоморфных максимальных параболических подгрупп, действия на смежных классах по которым имеют нужные подстепени и удовлетворяют условиям леммы, что и доказывает существование соответствующих а. г. Доказательство единственности а. г. с массивами пересечений 7, 8 и 10 следует из характеристики обобщенных муфанговых многоугольников [82, 83]. Такой взгляд на эти графы позволяет обнаружить, что они являются членами бесконечных серий а. г., инвариантных относительно групп $G_2(q)$ и ${}^2F_4(q)$.

Доказательство несуществования а. г. с массивом пересечений 1 следует из теоремы 18.4 в [7]. Несуществование а. г. (и даже д. р. г.) с массивом пересечений 11 было доказано комбинаторно, причем примененный метод доказательства может быть использован для бесконечной серии массивов пересечений. Разработанная А. В. Ивановым (см. 10.2) техника получения необходимых условий существования д. т. г., основанная на анализе вложений в граф клик фиксированного размера, позволяет единообразно доказать несуществование д. т. г. с массивами пересечений 1 и 5.

§ 8. ПРИМИТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕАБЕЛЕВЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ПОРЯДКА ДО 10^6

При обсуждении задачи о максимальных группах отмечалось, что примитивная группа подстановок, являющаяся представлением неабелевой простой группы, находится «под подозре-

нием» на максимальность. Если же нормализатор ее 2-замыкания в симметрической группе не максимален, то ее нетривиальная надгруппа, как правило, также неабелева простая группа и получаем представляющую самостоятельный интерес подстановочную реализацию вложения одной неабелевой простой группы в другую.

Стало уже традицией, что в исследовании неабелевых простых групп в качестве первого рубежа выбирается отметка 10^6 . М. Холл [84] описал все неабелевы простые группы порядка до 10^6 , Д. Маккей [85] вычислил таблицы характеров и вместе с Д. Фишером [86] описал их максимальные подгруппы. Наша цель состояла в построении всех примитивных представлений этих групп и определении решеток 2-замкнутых надгрупп в соответствующих симметрических группах. Все вычисления проводили с помощью ЭВМ на основе метода инвариантных отношений. Результаты представлены в [12, 13].

Ввиду наличия биекции между классами сопряженных максимальных подгрупп группы G и ее примитивными представлениями для построения примитивных представлений использовали каталог [86]. Полноту приведенного в каталоге списка максимальных подгрупп специально не проверяли, однако в ходе работы было обнаружено несколько допущенных в [86] ошибок (см. [12, 13]). Кроме того, нами охарактеризованы все максимальные подгруппы и вычислены подстепени всех примитивных представлений (в [86] эта информация приведена не для всех подгрупп).

Для каждой простой группы порядка до 10^6 , за исключением групп $\text{PSL}_2(q)$, было найдено ее представление наименьшей степени, из которого все остальные представления строились индукцированием (иногда двухкратным) на орбитах множеств, разбиений или циклических графов. В представлении (G, N) H -инвариантное отношение U , не инвариантное относительно G , находили разнообразными, иногда явно эвристическими, приемами, существенно зависящими от способа вложения подгруппы H в группу G . Тем не менее можно выделить один достаточно общий подход. Максимальную подгруппу H в группе G можно трактовать как нормализатор в G некоторой подгруппы F , изоморфной прямому произведению изоморфных между собой простых групп. Тогда каждая k -орбита H получается объединением некоторых k -орбит F , изоморфных между собой как k -отношения. Для F , которая имеет меньший порядок, нужные k -орбиты обычно удастся описать. Для групп серии $\text{PSL}_2(q)$, все максимальные подгруппы которых описаны Л. Диксоном [87], ранги и подстепени примитивных представлений можно вычислить без ЭВМ.

Решетки 2-замкнутых надгрупп полученных в [12] примитивных представлений ранга не больше 30 приведены в [13]. Незученными остались девять представлений большого ранга, а также все представления групп $\text{PSL}_2(q)$, ранги которых растут очень быстро. При идентификации группы автоморфизмов най-

денного подкольца W в V -кольце группы G по вычисленному на ЭВМ значению ее порядка могут встретиться три ситуации.

1. W — хорошо известное клеточное кольцо, однозначно определяемое своими структурными константами, группа автоморфизмов которого описана в литературе.

2. $|G| \leq |\text{Aut}(W)| \leq |\text{Aut}(G)|$. В этом случае удается отождествить $\text{Aut}(W)$ с некоторой подгруппой $\text{Aut}(G)$.

3. $|\text{Aut}(W)| > |\text{Aut}(G)|$. В этом случае с помощью соображений, приведенных в § 7, и пользуясь полными списками неабелевых простых групп, удается отождествить $\text{Aut}(W)$ с подгруппой группы автоморфизмов некоторой другой неабелевой простой группы G' .

В последних двух ситуациях использовались результаты Р. Стейнберга [88] об автоморфизмах конечных простых групп Ли, сведения об автоморфизмах спорадических простых групп [89], а также информация из [78, 84]. При идентификации мы стремились не опираться на гипотезу о полноте известного списка конечных простых групп. За несколькими исключениями, для которых исследования продолжаются, эту цель удалось достигнуть. Для большинства изученных представлений возникла вторая ситуация. Особенно интересны случаи с третьей ситуацией, в частности, найдены реализации вложений $\text{PSL}_3(4) \subset \subset \text{Aut}(\text{PSU}_4(3))$, $\text{PSU}_3(4) \subset \text{Aut}(G_2(4))$, $M_{22} \subset \text{Aut}(\text{PSU}_6(2))$, $M_{12} \subset O_{10}^-(2)$, $J_2 \subset \text{Aut}(\text{PSp}_6(4))$ примитивными группами подстановок степеней 280, 416, 672, 495 и 2016 соответственно.

Полученная побочная (с теоретико-групповой точки зрения) информация о клеточных подкольцах изученных V -колец представляет несомненный комбинаторный интерес. При интерпретации результатов особое внимание было уделено клеточным кольцам, соответствующим д. р. г. Таких колец найдено 43 для д. р. г. диаметра 2 (т. е. с. р. г.) и 16 для графов большего диаметра. Шесть из найденных с. р. г. оказались новыми, все они соответствуют нешуровым кольцам. Это графы с параметрами (v, k, λ, μ) , равными (144, 39, 6, 2), (231, 30, 9, 3), (280, 36, 8, 4), (280, 117, 44, 52), (280, 135, 70, 60), (560, 208, 72, 80) и группами автоморфизмов $\text{Aut}(\text{PSL}_3(3))$, $\text{Aut}(M_{22})$, $\text{Aut}(J_2)$, S_9 , $\text{Aut}(J_2)$ и $\text{Aut}(\text{Sz}(8))$ соответственно. Другие графы оказались известными, для некоторых из них впервые определена группа автоморфизмов или уточнены ее свойства, получены новые комбинаторные способы построения.

Несомненный интерес представляло бы систематическое изучение по описанной схеме примитивных представлений других групп, в частности подгрупп групп автоморфизмов неабелевых простых групп.

§ 9. КОНСТРУКТИВНОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ Д. Т. Г.

За последнее время накоплена весьма большая информация о д. т. г. Известно несколько десятков серий таких графов и большое число отдельных примеров (см. обзоры [71, 90]). Следую-

щим этапом должно стать полное описание д. т. г. из тех или иных классов. Один из естественных подходов состоит в получении полных списков попарно неизоморфных д. т. г. заданной степени k . Уже отмечалось, что эта задача решена при $k=3, 4$ (см. [72]). Хотя А. Гардинер классифицировал д. т. г. степени $k=4, 5, 6$ обхвата 3 [91], задача перечисления д. т. г. степени $k \geq 5$ до недавнего времени не была решена.

Принципиальный шаг к решению этого вопроса при любом k сделан А. А. Ивановым [92], который доказал, что если д. р. г. степени k имеет нестягиваемый цикл длины $g > 3$, то его диаметр $d \leq g \cdot 2^{k-1}$. Эта оценка для диаметра следует из доказанной там же теоремы: если в массиве $i(\Gamma)$ д. р. г. Γ при $s > 1$ имеет место $(c_{s-1}, b_{s-1}) \neq (c_s, b_s)$ и $(c_{s+t}, b_{s+t}) = (c_s, b_s)$, то $t < s$. Из этой теоремы, в частности, следует описание всех бесконечных д. р. г. конечной степени, что дает отрицательный ответ на вопрос Бабаи — Годсила (проблема 11 в [93]) о существовании таких графов связности не меньше двух. Другим важным ее следствием является ограничение диаметра д. т. г. некоторой функцией его степени в предположении справедливости гипотезы Симса. Гипотеза Симса состоит в том, что порядок фиксатора точки в примитивной группе подстановок, имеющей подстепень k , ограничен некоторой функцией $f(k)$. В недавней работе [94] гипотеза Симса доказана по модулю классификации конечных простых групп, однако полученная там оценка $f(k)$ неконструктивна.

Техника А. А. Иванова была развита А. В. Ивановым, который ввел для д. р. г. степени k понятие характеристической матрицы $A_s(u, x)$ вершины u относительно вершины x с расстоянием между ними $\rho(u; x) = s$. $A_s(u, x)$ — квадратная матрица размером $k \times k$, строки которой соответствуют соседям $z_i, i = 1, 2, \dots, k$, вершины u , столбцы — соседям $y_j, j = 1, 2, \dots, k$, вершины x , а элемент a_{ij} равен разности расстояний $\rho(z_i, y_j) - \rho(z_i, x)$. Изучение свойств характеристической матрицы позволило усилить результаты работы [92] и вывести ряд новых, легко проверяемых необходимых условий существования д. р. г. с заданным массивом пересечений.

Последний важный шаг в создании теоретических предпосылок к решению задачи конструктивного перечисления д. т. г. заданной степени сделан А. А. Ивановым, установившим связь между д. т. г. и s -транзитивными графами, недавние результаты о которых (см. обзор [95]) позволили, в частности, обосновать выполнение гипотезы Симса для групп автоморфизмов д. т. г. степени 5, 6, 7 и получить хорошие оценки диаметра этих графов.

Переборная программа для ЭВМ, генерирующая все массивы пересечений д. т. г. заданной степени, удовлетворяющие известным условиям реализуемости, разработана А. В. Ивановым и И. А. Фараджеевым. В этой программе «локальные» условия реализуемости проверяются в процессе построения массива пересечений, а глобальные условия (типа условия Крейна) после завершения его построения. Условия на мощности $|\Gamma_i(x)|$, выте-

жающие из справедливости гипотезы Симса для некоторых степеней k (в частности, для $k \leq 7$), гарантируют ограниченность диаметра графов и, следовательно, времени работы программы. Программа была апробирована перечислением массивов пересечений д. т. г. степени 3 и 4. Результаты оказались в полном соответствии с известными списками, причем при $k=4$ массивы $\{4, 3, 2, 2; 1, 2, 2, 4\}$ и $\{4, 3, 3, 2, 1; 1, 1, 2, 3, 4\}$, нереализуемость которых доказывалась в [96] специальными приемами, отбракованы заложенными в программе стандартными условиями.

С помощью этой программы построены массивы пересечений д. т. г. степени $k=5, 6, 7$. Их оказалось 16, 28 и 21 соответственно. Для каждого из них решен вопрос о существовании и построены полные списки попарно-неизоморфных д. т. г. При этом использовались приемы, частично описанные в § 7, 8. Оказалось, что существует 14, 24 и 14 д. т. г. степени 5, 6 и 7 соответственно. Только три из этих графов оказались новыми. Все они импримитивны и имеют массивы пересечений $\{5, 4, 4, 1; 1, 1, 4, 5\}$, $\{6, 5, 4, 1; 1, 2, 5, 6\}$ и $\{7, 6, 4, 4, 4, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 2, 4, 4, 6, 7\}$, количество вершин 32, 36 и 990, диаметр 4, 4 и 8. Особо интересен граф на 990 вершинах, группа автоморфизмов которого содержит в качестве подгруппы индекса 2 трехлистное накрытие простой группы Матье M_{22} .

Включение в программу новых условий реализуемости, полученных недавно А. В. Ивановым и основанных на изучении вложения в д. т. г. клик и циклов фиксированного размера, позволило резко сократить время генерации массивов пересечений и сделало реальным перечисление д. т. г. более высоких степеней. Результаты исследований, описанных в этом параграфе, изложены в [97].

В заключение отметим еще одно следствие из результатов [92]. Пусть группа автоморфизмов д. т. г. подобна действию группы G на смежных классах по подгруппе H , тогда $|G| < |H|^3$. Этот результат помог А. А. Иванову решить поставленную Н. Биггсом [98] задачу описания всех д. т. г., группа автоморфизмов которых изоморфна симметрической группе S_n . Следующий этап — разработка методов перечисления д. т. г., группа автоморфизмов которых изоморфна заданной абстрактной группе G . Особый интерес эта задача представляет для теории конечных групп в случае, когда G — неабелева простая группа.

§ 10. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

10.1. k -регулярные графы. С самого начала развития теории графов особое внимание исследователей привлекали графы, обладающие богатой симметрией. Интерес мотивировался как эстетическими соображениями, так и тем, что многие из них благодаря простой конструкции легко идентифицируются и служат хорошим материалом для проверки гипотез, иллюстрации оценок,

доказательства теорем. Попытки классификации графов с богатой симметрией предпринимались неоднократно (см., например [99]), однако выделяемые классы обычно оказывались либо необозримы, либо состояли из тривиальных графов: полных, пустых, их композиций и т. д. Интересна в этом плане задача классификации k -однородных графов, поставленная Я. Ю. Гольфандом и М. Х. Клином в [100]. Граф называется k -однородным, если любой изоморфизм его подграфов с числом вершин не более k можно продолжить до автоморфизма графа. Абсолютно однородные графы ($k = v$) исчерпываются графами $m \circ K_n$, их дополнениями и графами C_3 и $L(K_{3,3})$. С другой стороны, класс 1-однородных графов (вершинно-транзитивных) необозрим, а класс 2-однородных графов (графов ранга 3) весьма богат. Вычислительный эксперимент, проведенный в [100], позволяет предположить, что при $k = 3$ ситуация резко меняется. При $v \leq 300$ все 3-однородные графы хорошо обозримы, причем только один из них — граф Шлефли на 27 вершинах — 4-однородным. Ни одного 5-однородного графа не обнаружено.

Я. Ю. Гольфанд рассмотрел более общую задачу описания k -регулярных графов, у которых изоморфные подграфы с не более чем k вершинами имеют одинаковую степень в графе. Здесь под степенью подграфа Γ' в графе Γ понимается количество вершин графа Γ , смежных со всеми вершинами из Γ' . Ясно, что свойство k -регулярности есть комбинаторная аппроксимация свойства k -однородности. Очевидно, что k -регулярный граф при $k \geq 2$ сильнорегулярен. Исследуя с. р. г., у которых подграфы соседей и несоседей также с. р. г., Я. Ю. Гольфанд показал, что они могут принадлежать только к трем бесконечным двухпараметрическим сериям. Для промежуточного между 3- и 4-регулярными графами класса 3, 5-регулярных графов оказалось, что параметры его возможных членов исчерпываются двумя однопараметрическими сериями. Ни одного нетривиального 5-регулярного графа не существует, а полное описание 4-регулярных графов пока не получено. Развита при исследовании k -регулярных графов техника имеет самостоятельное значение; все доказательства носят элементарный характер. Для решения родственных задач в ряде работ (см., например, [101—103]) применена другая, более сложная техника. В [101, 102], в частности, независимо получены отмеченные выше результаты о 3-регулярных графах.

10.2. 4-условие и его обобщения. Аксиомы клеточного кольца представляют собой комбинаторную аппроксимацию транзитивности действия его группы автоморфизмов на дугах базисных графов. При этом все дуги базисного графа имеют одинаковые числовые инварианты, формулируемые в терминах k -вершинных подграфов с $k \leq 3$. При решении вопроса о шуровости клеточного кольца естественно рассматривать подграфы большего размера. В случае с. р. г. этот вопрос исследован М. Хестенесом и Д. Хигманом [104], получившими необходимое условие того, что с. р. г. — граф ранга 3 (4-условие): $k(\lambda(\lambda - 1)/2 - \alpha) = l\beta$, где α (или β) —

число 4-вершинных подграфов графа Γ с 6 (или 5) ребрами, содержащих выделенное ребро (или неребро) графа Γ . Для всех изучавшихся авторами с. р. г., не являющихся графами ранга 3 [30, 105, 106], числа α и β не есть инварианты ребер и перебер, так что 4-условие не выполняется.

А. В. Иванов получил аналог 4-условия для д. т. г. в виде системы диофантовых уравнений для структурных констант клеточного кольца, порожденного д. т. г. Дальнейшее развитие этой техники позволило вывести соотношения для количества циклов определенной длины, расположенных в д. т. г. заданным образом относительно фиксированной вершины.

Другое направление исследования все более тонких инвариантов д. т. г. связано с рассмотрением k -вершинных подграфов, $k \geq 5$, в графах ранга 3. Ряд интересных соотношений для 3-регулярных графов выведен в упомянутом выше (п. 10.1) исследовании Я. Ю. Гольфанда. А. В. Иванов получил систему из 34 диофантова уравнения с 34 неизвестными, описывающими число всевозможных подграфов с 5 вершинами в графе ранга 3. Исследование решений таких систем весьма затруднительно, поэтому пока их использование ограничилось рассмотрением нескольких примеров.

10.3. Несогласованные графы. Д. Фолкман в работе [107] положил начало изучению регулярных графов, у которых группа автоморфизмов действует транзитивно на ребрах, но интранзитивно на вершинах. Следуя В. Г. Визингу [108], будем называть такие графы несогласованными (н. г.). Н. г. двудольны, причем их группа автоморфизмов действует транзитивно на каждой доле. Д. Фолкман получил некоторые необходимые условия существования н. г., построил несколько бесконечных серий таких графов и сформулировал ряд вопросов о существовании н. г. с определенными параметрами. На большинство из этих вопросов к настоящему времени получены ответы (см. ссылки в [109]). А. В. Иванов провел конструктивное перечисление с помощью ЭВМ н. г. с числом вершин не более 30 на основе комбинаторной аппроксимации транзитивности действия на ребрах группы автоморфизмов. Оказалось [109], что все н. г. с числом вершин до 30 известны, а н. г. с 30 вершинами не существует, что стало отрицательным ответом на один из вопросов Фолкмана — Визинга.

Новый подход к изучению н. г. предложил М. Х. Клин [110], указавший достаточные условия существования н. г. в терминах V -колец специального вида интранзитивных групп подстановок. Этот подход показал необозримость класса н. г., поэтому интерес представляет классификация н. г., обладающих более редкими типами симметрии, например бипримитивных н. г. (б. п. н. г.), у которых группа автоморфизмов действует примитивно на каждой из долей. Первые примеры б. п. н. г. с 80, 126 и 990 вершинами построены М. Х. Клином и И. А. Фараджевым на основе пар неподобных представлений одинаковой степени групп $\text{PSU}_4(2)$, $\text{PSU}_3(3)$ и M_{12} (см. [12]). Комбинаторное построение

б. п. н. г. на 990 вершинах степеней 3, 12, 48 и 96, связанных с группой M_{12} , выполнено И. В. Чуваевой [111]. А. А. Иванов и М. Е. Иофинова описали все б. п. н. г. степени 3, опираясь на теоретико-групповые результаты Д. Голдшмита [112]. Элегантная конструкция наименьшего из таких графов приведена в [113].

10.4. 2-графы. По сравнению с 2-замкнутыми группами подстановок k -замкнутые группы при $k > 2$ устроены с комбинаторной точки зрения сложнее, так как для их описания необходимо привлекать отношения более высокой арности. Уместно выделить наиболее просто описываемые типы отношений арности больше двух. Наряду с классическими объектами (системами Штейнера, конечными плоскостями и т. д.), к таким отношениям принадлежат 2-графы. 2-граф на n -элементном множестве — это подмножество T в P_n^3 такое, что каждая четверка из P_n^4 содержит четное число троек из T . Среди групп автоморфизмов 2-графов встречаются некоторые интересные 2-транзитивные группы подстановок (см. [114, 115]). Другим источником интереса к 2-графам является возможность интерпретировать 2-граф как множество всех троек вершин обыкновенного графа Γ , порождающих подграфы с нечетным числом ребер. Это приводит к понятию переключательной эквивалентности на множестве графов с заданным числом вершин. Два графа переключательно эквивалентны, если они порождают один и тот же 2-граф. Интересно отметить совпадение числа всех попарно-неизоморфных 2-графов с числом всех эйлеровых графов, задача подсчета которых решена В. А. Лисковцом [116]. Обзор некоторых работ по классификации и перечислению 2-графов можно найти в [117]. Следующий шаг в этом направлении сделан В. А. Зайченко [43, 118], получившим с помощью ЭВМ полный с точностью до изоморфизма список 2-графов с 10 вершинами. Особый интерес представляют 2-графы, обладающие следующим замечательным свойством: их группы автоморфизмов могут быть реализованы как группы автоморфизмов обыкновенных графов, однако все эти графы содержатся в других переключательных классах. Для распознавания таких 2-графов использовался метод V -колец. Кроме того, найдено много 2-графов, группы автоморфизмов которых нереализуемы в классе обыкновенных графов.

10.5. S -кольца неабелевых групп и G — CI-группы. Классические применения метода S -колец, предложенного И. Шуром и развитого его учениками, относятся к абелевым группам. Частный случай циклических групп рассмотрен в § 5, обзор результатов о S -кольцах произвольных абелевых групп содержится в [7]. Хотя Г. Виланд в этой монографии и указывает на важность изучения S -колец неабелевых групп, до недавнего времени эта тема оставалась практически неисследованной.

В работе [119] М. Е. Музычук изучает теоретико-числовые свойства длин базисных элементов S -колец и обобщает на произвольные S -кольца введенное Р. Пешелем понятие S -системы. В качестве иллюстрации развитая техника используется для опи-

сания всех S -колец над знакопеременной группой A_4 . В дальнейшем аналогичными методами ему удалось получить частичное решение поставленной Г. Виландом в [7] задачи описания решетки S -колец над группой A_5 — описать все примитивные элементы этой решетки [120]. Нетривиальных элементов в ней оказалось только два, оба они шуровы; первое (второе) S -кольцо имеет в качестве базиса классы сопряженных (подобных в представлении на 5 точках) элементов A_5 . Импримитивные S -кольца над A_5 пока не описаны. Использовать для исследования решетки подколец V -кольца регулярного представления группы A_5 комплекс программ, описанный в § 6, не удастся, так как ранг этого представления слишком велик (симметризованный ранг равен 38).

Интерес к S -кольцам над A_5 объясняется их связью с G — CI -группами, введенными Л. Бабаи и П. Франклом [121] в связи с обобщением рассмотренной в § 5 проблемы Адама. Конечная группа называется G — CI -группой, если изоморфизм любых неориентированных графов K эли этой группы может быть реализован автоморфизмом группы. В [121] доказано, что всякая неразрешимая G — CI -группа изоморфна с точностью до абелева прямого множителя одной из групп: A_5 , S_5 , $PSL_2(13)$, $SL_2(13)$. Впоследствии была анонсирована невозможность двух последних случаев. Зная список S -колец над A_5 , нетрудно выяснить (как это сделано в [43] для группы Z_{36}), является ли A_5 G — CI -группой.

10.6. Примитивные графы. Каталоги графов с небольшим числом вершин традиционно используются как в комбинаторных исследованиях, так и при решении прикладных задач. При их составлении очень быстро возникает противоречие между потребностью в полных каталогах широких классов графов с возможно большим числом вершин и трудностью их получения и использования вследствие плохой обозримости полученной информации. Так, построенный в [122] каталог графов с девятью вершинами содержит около 275 000 таких графов, распространяется на машинном носителе и пригоден только для машинного использования. Хорошо известно, что при комбинаторном сужении класса каталогизируемых графов все равно с увеличением числа вершин наблюдается лавинообразный рост объема каталогов и трудностей их машинного составления (примером могут служить каталоги регулярных [123] и сильнорегулярных [124] графов). Те же проблемы, но в менее резкой форме возникают, когда класс каталогизируемых графов описывается в терминах некоторых свойств их групп автоморфизмов. Например, при характеристизации д. т. г. возникает потребность в каталогах графов с небольшим числом вершин, имеющих транзитивную группу автоморфизмов. Однако полученный Б. Маккеем [79] каталог таких графов с числом вершин до 20 малоприменим для практического использования ввиду большого объема и неадекватности представления информации.

Многие из отмеченных трудностей снимаются при дальнейшем сужении класса графов. Вполне реально, например, говорить о ка-

n	k																Всего
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	44		
9		1														1	
10	1		1													1	
15																1	
16				1	1											2	
21			1				2		1							4	
25			1				2			4						8	
27					1		1		1	1						4	
28	1				2			3	2	1						8	
35			1							1						3	
36				1		1			2		3	3	1			10	
40																2	
45			1				2			2			3		3	12	
49			1		1		4			3				5	14	21	
50					1											1	

талогах д. т. г. или 3-однородных графов с числом вершин порядка 10^3 — 10^4 . В этом плане промежуточной и поэтому особенно интересной представляется задача каталогизации примитивных графов, т. е. графов с примитивной группой автоморфизмов.

Перечисление примитивных графов с заданным числом вершин n можно выполнить методом V -колец с помощью комплекса программ, описанного в § 6; при этом достаточно знать все минимальные примитивные группы подстановок степени n . Для каждой из таких групп построим V -кольцо, найдем решетку подколец и вычислим их группы автоморфизмов. Отобрав попарно неизоморфные графы, получаемые объединением базисных элементов каждого из попарно неизоморфных подколец, получим полный список примитивных графов с n вершинами. Их группы автоморфизмов легко идентифицируются с элементами построенной решетки 2-замкнутых примитивных групп степени n .

Перечисление примитивных графов с числом вершин ≤ 50 осуществлено И. А. Фараджевым на основе каталогов примитивных групп подстановок, полученных Ч. Симсом [124] для $n \leq 20$ и Б. А. Погореловым [125] для $21 \leq n \leq 50$. При $n = p$, p простое, использование стандартной техники затруднено из-за большого ранга групп Z_r , однако все примитивные графы с простым числом вершин циклические (см. § 5) и их перечисление не вызывает трудностей. В [125] не описаны минимальные примитивные подгруппы групп $AGL_n(p)$, возникающих при $n = p^k$, $k > 1$, поэтому в таких случаях исходили из элементарных абелевых групп E_{p^k} , перечисляя в их V -кольцах только примитивные подкольца. Количество примитивных графов степени k с $n \neq p$ вершинами приведено в табл. 2.

10.7. Аморфные клеточные кольца. Множество $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ из n^2 элементов, называемых точками, и система \mathcal{L} n -элементных подмножеств множества \mathcal{P} , называемых прямыми,

образуют аффинную плоскость, если через любые две точки проходит в точности одна прямая; для заданной прямой l и точки P таких, что $P \notin L$, существует единственная прямая L' такая, что $P \in L'$ и $L \cap L' = \emptyset$.

Множество прямых аффинной плоскости разбивается на $n + 1$ пучок параллельных прямых по n прямым в каждом. Пусть \mathcal{L}_i — один из таких пучков. Сопоставим ему граф Γ_i на множестве вершин \mathcal{P} , в котором пара точек соединена ребром тогда и только тогда, когда проходящая через них прямая принадлежит \mathcal{L}_i . Нетрудно проверить, что графы $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n+1}$, где Γ_0 — граф из петель, образуют базис клеточного кольца, которое называется аффинным. Я. Ю. Гольфанд и М. Х. Клиш показали, что аффинное клеточное кольцо обладает замечательным свойством: любое разбиение множества его антирефлексивных образующих порождает клеточное кольцо. Клеточные кольца ранга больше 3 с таким свойством будем называть аморфными. Из существования аффинных плоскостей порядка p^k , где p простое, следует существование аморфных клеточных колец сколь угодно большого ранга. Множество аморфных колец не исчерпывается аффинными. Например, аморфно V -кольцо импримитивного представления группы M_{12} по подгруппе $L_2(11)$ степени 144. Задача описания всех аморфных клеточных колец в настоящее время не решена. Недавно А. В. Иванов доказал, что аморфные клеточные кольца существуют только на n^2 точках, определил возможные параметры аморфных колец ранга 4 и перечислил все аморфные клеточные кольца не более чем на 25 точках.

Интерес к аморфным клеточным кольцам связан с алгоритмическими трудностями при перечислении клеточных подколец: существование таких колец, по-видимому, показывает невозможность избежать полного перебора при перечислении подколец.

10.8. Вычисление подстепеней. Подстепени транзитивной группы подстановок вычисляются в процессе синтеза ее V -кольца (см. § 6) как длины орбит фиксатора точки. Однако при решении некоторых задач достаточно определить только ранг и подстепени группы подстановок, не строя в явном виде ее V -кольцо. Графы ранга 3, например, часто однозначно характеризуются своими подстепенями (см. [90]); существование д. т. г., инвариантного относительно заданной группы подстановок, иногда можно обосновать без явного построения, зная только подстепени этой группы (см. лемму в § 7). В связи с этим актуальна задача выделения того минимального объема теоретико-групповой информации, который достаточен для вычисления ранга и подстепеней заданной транзитивной группы подстановок.

Один подход к решению этой задачи основывается на установлении взаимно однозначного соответствия между множеством элементов, на которых действует группа, и некоторыми комбинаторными объектами, перечислении представителей классов эквивалентности пар этих объектов под действием группы, нахождении групп автоморфизмов этих представителей и вычислении

мощности классов по теореме Лагранжа. В рамках этого подхода И. В. Чуваева [111] вычислила подстепени некоторых примитивных представлений группы Матье M_{12} , используя систему Штейнера $S(5, 6, 12)$, а А. В. Иванов разработал программу вычисления подстепеней, действия симметрической группы S_n на смежных классах по сплетению симметрических групп S_k и S_l , $n = kl$.

Другой подход, предложенный в [126], опирается на идеи В. Бернсайда [127] и использует простую, но важную теорему Альперина [128], обобщающую классические результаты Жордана и Маннинга. Вычисление подстепеней транзитивной группы (G, N) сводится при этом к решению системы линейных уравнений, возникающей при подсчете числа неподвижных точек действия на N всех подгрупп фиксатора G_x точки x . А. А. Иванов [113] обобщил этот метод для вычисления длин орбит произвольной подгруппы в транзитивной группе подстановок и привел ряд убедительных примеров, демонстрирующих эффективность предложенной техники. Эти же идеи положены в основу интенсивно разрабатываемого в настоящее время метода неподвижных точек, позволяющего резко сократить перебор при решении задачи о транзитивном расширении группы подстановок.

§ 11. НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

1. Описать решетку подколец V -кольца группы (\tilde{S}_n^m, P_n^m) .
2. Описать решетку подколец V -кольца группы $(S_n \uparrow S_m, N^m)$.
3. Описать все S -кольца над Z_n при произвольном n .
4. Найти критерий изоморфизма циклических графов на n вершинах.
5. Построить алгоритм перечисления подколец клеточного кольца с полиномиальной (относительно ранга исходного кольца и числа подколец) трудоемкостью.
6. Установить, что диаметр д. р. г. ограничен линейной функцией от степени и длины минимального нестягиваемого цикла, отличного от треугольника.
7. Определить, существуют ли д. р. г. степени больше двух со сколь угодно большой длиной минимального нестягиваемого цикла, отличного от треугольника.
8. Описать все д. т. г., инвариантные относительно транзитивного действия спорадических простых групп.
9. Описать все д. р. г., допускающие транзитивное на ребрах действие спорадических простых групп.
10. Описать все 4-регулярные графы.
11. Доказать, что граф Шлефли — единственный нетривиальный 4-однородный граф.
12. Описать все 3-однородные графы.
13. Указать пример с. р. г., удовлетворяющего 4-условию, но не являющегося графом ранга 3.

14. Описать все S -кольца над A_5 .
15. Установить, являются ли A_5 и S_5 G — CI -группами.
16. Описать все аморфные клеточные кольца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ташкевич Р. И. Отношения, допускающие транзитивную группу автоморфизмов.— *Мат. сборник*, 1975, 97, № 2, с. 262—277.
2. Krasner M. Une généralisation de la notion de corps.— *J. Math. pure et appl.*, 1938, N 119, p. 367—383.
3. Бондарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста. I, II.— *Кибернетика*, 1969, № 3, с. 1—10; № 5, с. 1—9.
4. Калужнин Л. А., Клиш М. Х. О некоторых максимальных подгруппах симметрических и знакопеременных групп.— *Мат. сборник*, 1972, 87, № 1, с. 91—121.
5. Pöschel R., Kalužnin L. A. Funktionen und Relationenalgebren.— Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1979.
6. Калужнин Л. А., Суцанский В. И., Устищенко В. А. Применение ЭВМ в теории групп подстановок и ее приложениях.— *Кибернетика*, 1982, № 6, с. 83—94.
7. Wielandt H. Finite permutation groups.— N. Y.: Acad. Press, 1964.
8. Wielandt H. Permutation groups through invariant relations and invariant functions. Lecture notes.— Columbus Dept. Math. Ohio State Univ., 1969.
9. Wielandt H. Permutation representation. Illin.— *Math. J.*, 1969, 13, N 1, p. 91—94.
10. On constraction and identification of graphs/Ed. B. Weisfeiler.— *Lect. Notes Math.*, 1976, N 558.
11. Алгоритмические исследования в комбинаторике/Под ред. И. А. Фараджева.— М.: Наука, 1978.
12. Иванов А. А., Клиш М. Х., Фараджев И. А. Примитивные представления неабелевых простых групп порядка меньше 10^6 . Ч. 1.— М., 1982.— (Препринт АН СССР, ВНИИСИ).
13. Иванов А. А., Клиш М. Х., Фараджев И. А. Примитивные представления неабелевых простых групп порядка меньше 10^6 . Ч. 2.— М., 1984.— (Препринт АН СССР, ВНИИСИ).
14. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.
15. Shrikhande S. S. The uniqueness of the L_2 association schemes.— *Ann. Math. Stat.*, 1959, N 30, p. 781—788.
16. Chang Li Chien. The uniqueness and nonuniqueness of the triangular association schemes.— *Sci. Records*, 1959, N 3, p. 604—613.
17. Адельсон-Вельский Г. М., Вейсфейлер Б. Ю., Леман А. А., Фараджев И. А. Об одном примере графа, не имеющего транзитивной группы автоморфизмов.— *Докл. АН СССР*, 1969, 185, № 5, с. 575—576.
18. Hecke E. Lecture on Dirichlet series, modular functions and quadratic forms.— Prinseton: Inst. for Adv. Studies, 1938.
19. Дельсарт Ф. Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования.— М.: Мир, 1976.
20. Клиш М. Х. Исследование алгебр инвариантных отношений некоторых классов групп подстановок: Дис. канд. физ.-мат. наук.— Николаев: НКИ, 1974.
21. Shur I. Zur Theorie der einfach transitiven Permutationengruppen. S.-B.: Preuss. Acad. Wiss., Phis.-math. Kl., 1933, 18/20, S. 598—623.
22. Kochendörffer R. Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen.— Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft, 1966.
23. Higman D. G. Intersection matrices for finite permutation groups.— *J. Algebra*, 1967, 6, p. 22—24.

24. Sims C. C. Graphs and finite permutation groups. I.— Math. Z., 1967, 95, p. 76—86.
25. Pöschel R. Untersuchungen von S-Ringen, insbesondere im Gruppenring von p-Gruppen.— Math. Nachr., 1974, 60, S. 1—27.
26. Biggs N. L. Automorphic graphs and the Krein condition.— Geom. dedic., 1976, 5, N 1, p. 117—127.
27. Байрамов Р. А. К проблеме полноты в симметрической полугруппе.— Дискретный анализ, 1966, № 8, с. 3—26.
28. Ball R. Maximal subgroups of the symmetric groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1966, 121, N 2, p. 398—407.
29. Кли́н М. Х. Об одной бесконечной серии максимальных подгрупп симметрических групп.— Тр. Николаевск. кораблестр. ин-та, 1970, 41, с. 148—151.
30. Кли́н М. Х. Рассмотрение на ЭВМ Мир-1 исключительных случаев в задаче о максимальной индуцированных симметрических групп.— В кн.: Вычисления в алгебре и комбинаторике. Киев: ИК АН УССР, 1978, с. 54—72.
31. Усти́ненко-Бакумовский В. А. Алгоритм построения блок-схем и сильно-регулярных графов с заданной группой автоморфизмов.— В кн.: Вычисления в алгебре и комбинаторике. Киев: ИК АН УССР, 1978, с. 137—148.
32. Halberstadt E. On certain maximal subgroups of symmetric or alternating groups.— Math. Z., 1976, 151, N 1, p. 117—125.
33. Усти́ненко-Бакумовский В. А. Решетка надгрупп индуцированной симметрической группы.— Докл. АН СССР, 1977, 237, № 2, с. 276—288.
34. Усти́ненко-Бакумовский В. А. Индуцированные максимальные группы подстановок: Дис. канд. физ.-мат. наук.— Киев: КГУ, 1979.
35. Skalba J. On the maximality of S_n in $S\left(\begin{smallmatrix} n \\ h \end{smallmatrix}\right)$.— J. Algebra. 1982, 75, p. 158—174.
36. Симаков Н. В., Зяновьев В. А., Зайцев Г. В. Графы биномиальных коэффициентов, равновесные коды и тактические конфигурации.— В кн.: Тезисы докладов семинара по дискретной математике. Одесса: ОПИ, 1970, с. 18—19.
37. Nagary F. Exponentiation of permutation groups.— Amer. Math. Monthly, 1959, 66, p. 572—575.
38. Калужний Л. А., Кли́н М. Х., Суцанский В. И. Операция экспоненцирования групп подстановок. I.— Изв. вузов. Сер. мат., 1979, № 8, с. 26—33.
39. Ромов Б. А. Об унипримитивных фундаментах максимальных подалгебр Поста.— Кибернетика, 1971, № 6, с. 21—30.
40. Кли́н М. Х. Об одном методе построения примитивных графов.— Тр. Николаевск. кораблестр. ин-та, 1974, 87, с. 3—8.
41. Усти́ненко-Бакумовский В. А. Сильно-регулярные графы, инвариантные относительно группы $[\gamma_n]^{v_m}$ при $n \geq 3$.— В кн.: Вычисления в алгебре и комбинаторике. Киев: ИК АН УССР, 1978, с. 101—113.
42. Усти́ненко-Бакумовский В. А. О группах автоморфизмов сильно-регулярных графов, инвариантных относительно экспоненцирования симметрических групп.— В кн.: Вычисления в алгебре, теории чисел и комбинаторике. Киев: ИК АН УССР, 1980, с. 59—72.
43. Зайченко В. А. Алгоритмический подход к синтезу комбинаторных объектов и вычислениям в группах подстановок на основе метода инвариантных отношений: Дис. канд. физ.-мат. наук.— М.: МФТИ, 1981.
44. Зайченко В. А. Алгоритмы вычислений в V-кольцах групп подстановок.— М., 1981.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 5372—81 Деп.
45. Усти́ненко-Бакумовский В. А. О примитивных группах подстановок, содержащих экспоненцирование $S_2 \uparrow S_{2k}$.— В кн.: Тезисы докладов XVI Всесоюзной алгебраической конф. Ч. I. Л.: ЛОМИ, 1981, с. 197—198.
46. Jones J. A., Soomro K. D. Maximal subgroups of symmetric and alternating groups. Univ. of Southampton, 1982.

47. Калужний Л. А., Суцанский В. П., Устименко-Бакумовский В. А. Экспоненцирование в теории групп подстановок и ее приложениях.— В кн.: Материалы VI Всесоюзной конференции по теории групп. Киев: ИМ АН УССР, 1979, с. 135—145.
48. Устименко-Бакумовский В. А. О V -кольцах Шура конечной группы Шевалле и ее группы Вейля, действующих на флагах.— В кн.: VIII Всесоюзный симпозиум по теории групп. Киев: ИМ АН УССР, 1982, с. 130.
49. Scott L. L. Representation of characteristic p .— In: Proc. of A. M. S. Summer Inst. on Finite Groups. Santa Cruz, 1979, p. 1—23.
50. Устименко-Бакумовский В. А. Максимальность группы $PGL_n(q)$, действующей на подпространствах размерности m .— Докл. АН СССР, 1978, 240, № 6, с. 1305—1308.
51. Ждан-Пушкин В. В. Решетки подгрупп группы $PU_4(q)$, действующих на изотропных прямых.— В кн.: Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1981, с. 38—48.
52. Устименко В. А. О действиях групп Шевалле на максимальных параболических подгруппах.— В кн.: XVII Всесоюзная алгебраическая конференция. Ч. 1. Минск: ИМ АН БССР, 1983, с. 195—196.
53. Cameron P. J. Finite permutation groups and finite simple groups.— Bull. London Math. Soc., 1981, 13, p. 1—22.
54. Klin M. Ch., Naimark N. L., Pöschel R. Shur rings over Z_{2^m} .— 1981.— (Preprint/Acad. Wiss. DDR; N 14).
55. Гольфанд Я. Ю., Кли́н М. Х., Наймарк Н. Л. Строение S -колец над Z_{2^m} .— В кн.: XVI Всесоюзная алгебраическая конференция. Ч. 2. Л.: ЛОМИ, 1981, с. 195—196.
56. Klin M. H., Pöschel R. The König problem, the isomorphism problem for cyclic graphs and the method of Shur rings.— In: Algebraic Methods in Graph Theory. Budapest, 1981, p. 405—434.
57. Adam A. Problem 2—10.— J. Comb. Theory, 1967, N 2, p. 393.
58. Klin M. Ch., Pöschel R. The isomorphism problem for circulant graphs with p^n vertices.— Berlin, 1980.— (Preprint/Zentralinst. für Math. und Mech.).
59. Егоров В. Н., Марков А. И. О гипотезе Адама для графов с циркулянтными матрицами смежности вершин.— Докл. АН СССР, 1979, 249, № 3, с. 529—532.
60. Фараджев И. А. Комплекс программ для вычислений в V -кольцах групп подстановок.— В кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на сетях и графах. Ч. 1. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 218—222.
61. Ждан-Пушкин В. В., Устименко-Бакумовский В. А. V -кольца Шура конечных унитарных групп, действующих на максимальных изотропных подпространствах.— В кн.: VIII Всесоюзный симпозиум по теории групп. Киев: ИМ АН УССР, 1982, с. 36.
62. Калужний Л. А. О задании математических объектов.— В кн.: Искусственный интеллект и автоматизация исследований в математике. Киев: ИК АН УССР, 1978, с. 31—33.
63. Зайченко В. А., Кли́н М. Х., Фараджев И. А. О некоторых вопросах, связанных с представлением групп подстановок в памяти ЭВМ.— В кн.: Вычисления в алгебре, теории чисел и комбинаторике. Киев: ИК АН УССР, 1980, с. 21—32.
64. Симс Ч. К. Определение классов сопряженности одной группы перестановок.— В кн.: Вычисления в алгебре и теории чисел. М.: Мир, 1976, с. 148—154.
65. Cannon J., Dimino L., Havas G. Implementation and analysis of the Todd-Coxeter algorithm.— Math. Comput., 1973, 27, N 123, p. 463—490.
66. Livingstone D. On the permutation representation of the Janko group.— J. Algebra, 1967, N 6, p. 43—55.
67. Арлазаров В. Л., Зуев И. В., Усков А. В., Фараджев И. А. Алгоритм приведения конечного неориентированного графа к каноническому виду.— ЖВМиМФ, 1974, 14, № 3, с. 737—747.

68. Зайченко В. А., Иванов А. В., Розенфельд М. З., Фараджев И. А. Алгоритм проверки каноничности частично-заполненной матрицы смежности графа.— В кн.: Алгоритмические исследования в комбинаторике. М.: Наука, 1978, с. 19—24.
69. McKay B. D. Computing automorphisms and canonical labelling of graphs.— *Lect. Notes Math.*, 1978, N 686, p. 223—232.
70. Biggs N. L. *Algebraic Graph Theory*.— Cambridge: Univ. Press, 1974.
71. Cohen A. M. A synopsis of known distance-regular graphs with large diameter.— *Math. Cent. Afd. Zuivere wisk.* 1981, N 168.
72. Gardiner A. Symmetry condition in graphs.— *London Math. Soc. Lect. Note Ser.*, 1979, N 38, p. 22—43.
73. Иванов А. А. Построение с помощью ЭВМ некоторых новых автоморфных графов.— В кн.: Аэрофизика и прикладная математика. М.: МФТИ, 1981, с. 144—146.
74. Зайченко В. А., Иванов А. А., Клиш М. Х. Построение и исследование некоторых новых автоморфных графов.— В кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на сетях и графах. Ч. 2. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 48—50.
75. Buekenhout F., Rowlinson P. The uniqueness of certain automorphic graphs.— *Geom. dedic.*, 1981, 14, N 4, p. 443—446.
76. Cohen A. M. Geometries originating from certain distance regular graphs.— *London Math. Soc. Lect. Note Ser.*, 1981, N 49, p. 81—87.
77. Gordon L. M., Livingstone R. The construction of some automorphic graphs.— *Geom. dedic.*, 1981, 10, p. 261—267.
78. Beizagel B. Über einfache endlicher Gruppen mit Silov 2-Gruppen der Ordnung höchstens 2^{10} .— *Comm. Algebra*, 1979, N 5, s. 113—170.
79. McKay B. D. Transitive graphs with fewer than twenty vertices.— *Math. Comput.*, 1979, 33, N 147, p. 1101—1121.
80. Dickson L. E. Theory of linear groups in an arbitrary field.— *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1901, 2, N 4, p. 363—393.
81. Tits J. Algebraic and abstract simple groups.— *Ann. Math.*, 1964, 80, N 2, p. 313—324.
82. Yanushka A. Generalised hexagons of order (t, t) .— *Israel J. Math.*, 1976, 23, p. 309—324.
83. Tits J. Classification of buildings of spherical type and Moufang polygons.— *Atti dei Conv. Lincei. Roma: Acc. Naz. Lincei*, 1976, p. 230—246.
84. Холл М. Построение конечных групп.— В кн.: Вычисления в алгебре и теории чисел. М.: Мир, 1976, с. 95—128.
85. McKay J. The simple groups G , $|G| < 10^6$ — character tables.— *Comm. Algebra*, 1979, 7, N 13, p. 1407—1445.
86. Fischer J., McKay J. The nonabelian simple groups G , $|G| < 10^6$ — maximal subgroups.— *Math. Comput.*, 1978, 32, N 144, p. 1293—1302.
87. Dickson L. E. *Linear Groups with Exposition of the Galois field theory*.— N. Y.: Dover, 1958.
88. Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups.— *Canad. J. Math.*, 1960, 12, N 4, p. 606—615.
89. Сыркин С. А. Абстрактные свойства простых спорадических групп.— *УМН*, 1980, 35, № 5, с. 43—55.
90. Hubaut X. L. Strongly regular graphs.— *Discrete Math.*, 1975, 13, N 4, p. 357—381.
91. Gardiner A. Classifying distance-transitive graphs.— *Lect. Notes Math.*, 1982, N 952, p. 67—88.
92. Иванов А. А. Ограничение диаметра дистанционно-регулярного графа.— *Докл. АН СССР*, 1983, 271, № 4, с. 789—792.
93. *Unsolved problems. Summer research workshop in algebraic combinatorics.* Simon Fraser Univ., 1979.
94. Cameron P. J., Praeger C. E., Saxl J., Seitz C. M. On the Sims conjecture and distance-transitive graphs.— *Bull. London Math. Soc.*, 1983, 15, N 5, p. 499—506.
95. Weiss R. s -transitive graphs.— In: *Algebraic methods in Graphs Theory.* Budapest, 1981, p. 827—847.

96. Smith D. H. On bipartite tetravalent graphs.— *Discrete Math.*, 1974, 10, p. 167—172.
97. Иванов А. А., Иванов А. В., Фараджев И. А. Дистанционно-транзитивные графы степени 5, 6, 7.— *ЖВМиМФ*, 1984, 24, № 11, с. 1704—1718.
98. Biggs N. L. Some odd graph. theory.— *Ann. N. Y. Acad. of Sci.*, 1979, 319, p. 71—81.
99. Титов В. К. О симметрии в графах.— В кн.: *Вопросы кибернетики*. Ч. 2. М.: Наука, 1975, с. 76—109.
100. Гольфанд Я. Ю., Клин М. Х. О k -однородных графах.— В кн.: *Алгоритмические исследования в комбинаторике*. М.: Наука, 1978, с. 76—85.
101. Cameron P. J. 6-transitive graphs.— *J. Comb. Th.*, 1980, B28, N 2, p. 168—179.
102. Cameron P. J., Goethals J. M., Seidel J. J. Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents.— *J. Algebra*, 1978, 55, N 2, p. 257—280.
103. Enomoto H. Combinatorially homogeneous graphs.— *J. Comb. Th.*, 1981, B30, p. 215—223.
104. Hestenes M. D., Higman D. G. Rank 3 groups and strongly regular graphs.— *SIAM AMS Proc.*, 1971, N 4, p. 141—160.
105. Зайченко В. А., Клин М. Х. Построение и исследование с помощью ЭВМ некоторых блок-схем и сильно регулярных графов, инвариантных относительно экспоненцирования симметрических групп.— В кн.: *Группы подстановок и комбинаторные объекты*. Киев, 1982, с. 18—37. (Препринт/АН УССР, ИМ; 82.14).
106. Арлазаров В. Л., Леман А. А., Розенфельд М. З. Построение и исследование на ЭВМ графов с 25, 26 и 29 вершинами.— М., 1975.— (Препринт/АН СССР, ИИУ).
107. Folkman J. Regular line symmetric graphs.— *J. Comb. Th.*, 1967, 3, N 3, p. 215—232.
108. Визинг В. Г. Некоторые нерешенные задачи теории графов.— *УМН*, 1968, 23, № 6, с. 117—134.
109. Иванов А. В. О регулярных реберно-симметричных, но не вершинно-симметричных графах.— В кн.: *Группы подстановок и комбинаторные объекты*. Киев, 1982, с. 38—51.— (Препринт/АН УССР, ИМ; 82.14).
110. Klin M. H. On the edge but not vertex transitive graphs.— In: *Algebraic Methods in Graph Theory*. Budapest, 1981, p. 399—403.
111. Чуваева И. В. О некоторых комбинаторных объектах, инвариантных относительно группы Матве M_{12} .— В кн.: *Методы исследования сложных систем*. М.: ВНИИСИ, 1983, с. 47—52.
112. Goldschmidt D. Automorphisms of trivalent graphs.— *Ann. of Math.*, 1980, 111, p. 377—406.
113. Иванов А. А. Вычисление длин орбит подгруппы в транзитивной группе подстановок.— В кн.: *Методы исследования сложных систем*. М.: ВНИИСИ, 1983, с. 3—8.
114. Seidel J. J. A survey of two-graphs.— *Atti dei Conv. Lincei. Roma: Acc. Naz. Lincei*, 1976, p. 481—511.
115. Tailor D. E. Regular 2-graphs.— *Proc. London Math. Soc.*, 1977, 35, N 2, p. 257—274.
116. Лисковец В. А. Перечисление эйлеровых графов.— *Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1970, № 6, с. 38—46.
117. Bussemaker F. C., Mathon R. A., Seidel J. J. Tables of two-graphs.— In: *T. H. Report 79-WCK-05*. Eindhoven: Techn. Univ., 1979.
118. Зайченко В. А. Конструктивное перечисление 2-графов порядка 10. М., 1981.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 5373—81 Деп.
119. Музычук М. Е. Описание S -колец над группой A_4 .— В кн.: *Группы подстановок и комбинаторные объекты*. Киев, 1982, с. 3—17. (Препринт/АН УССР, ИМ; 82.14).
120. Музычук М. Е. Строение примитивных S -колец над группой A_5 .— В кн.: *VIII Всесоюзный симпозиум по теории групп*. Киев: ИМ АН УССР, 1982, с. 83—84.
121. Babai L., Frankl P. Isomorphism of Cayley graphs. II.— *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 1979, 34, p. 177—183.

122. Baker H. H., Dewdney A. K., Szilard A. L. Generating the nine point graphs.— *Math. Comp.*, 1974, 28, p. 833—838.
123. Фараджев И. А. Конструктивное перечисление регулярных графов.— *УМН*, 1976, 31, № 1, с. 246.
124. Симс Ч. К. Вычислительные методы в изучении групп перестановок.— В кн.: *Вычисления в алгебре и теории чисел*. М.: Мир, 1976, с. 129—147.
125. Погорелов Б. А. Прimitивные группы подстановок малых степеней.— *Алгебра и логика*, 1980, 19, № 3, с. 348—379, № 4, с. 423—457.
126. Иванов А. А., Клиш М. Х., Царанов С. В., Шпекторов С. В. К вопросу о вычислении подстепеней транзитивных групп подстановок.— *УМН*, 1983, 38, № 6, с. 115—116.
127. Burnside W. *Theory of groups of finite order*.— Cambridge: Univ. Press, 1911.
128. Alperin J. L. On the theorem of Manning.— *Math. Z.*, 1965, 88, p. 434—435.

ДИАГРАММЫ, ЧИСЛА СТАБИЛЬНОСТИ И ЦИКЛОВЫЕ ИНДЕКСЫ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРАФОВ

В. А. КОХОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существенно расширяются алгебраические исследования с применением ЭВМ. Это вызвано необходимостью решения широкого спектра алгебраических задач, возникающих в прикладных исследованиях [1]. Из них наиболее значима задача построения и исследования группы симметрий дискретного объекта и ее подгрупп. А учет симметрии может существенно сократить или ликвидировать перебор вариантов, являющийся универсальным методом решения таких задач, как изоморфизм графов, булевых функций и др. В работе исследуется симметрия связанных обыкновенных транзитивных графов, т. е. графов, группа автоморфизмов которых действует транзитивно на множестве вершин. Выделение видов симметрии транзитивных графов имеет целью разработку методов конструктивного перечисления графов каждого вида симметрии. Интерес к исследованию транзитивных графов связан с тем, что они являются высокосимметричными комбинаторными объектами и включают большинство контрпримеров или «трудных» примеров к эвристическим алгоритмам распознавания изоморфизма графов, анализа групп автоморфизмов графов и др.

Следует отметить, что конструктивное перечисление транзитивных графов имеет особый интерес, связанный с анализом и характеристикой конечных абстрактных групп малого порядка, так как ориентация ребер графа и их раскраска позволяют строить диаграммы Кэли, т. е. «порождать» и исследовать графы групп автоморфизмов графов [2]. Первоочередной интерес пред-

ставляют графы, порождающие диаграмму Кэли своей группы автоморфизмов, т. е. с регулярной группой [3, 4]. Не менее интересно семейство дистанционно-транзитивных графов, группы автоморфизмов которых действуют транзитивно на упорядоченных парах равноудаленных вершин. Данные графы нашли широкое применение в алгебраической теории кодирования. Установлено, что для многих известных конечных простых групп их «естественные» подстановочные представления имеют вид группы автоморфизмов определенных дистанционно-транзитивных графов [5].

Еще один новый аспект исследования транзитивных графов — выделение таких семейств графов, которые не порождают диаграмму Кэли на основе раскрасок ребер и их ориентации, но могут быть исследованы и изучены в терминах образующих, т. е. раскрасок ребер [6]. Конструктивное перечисление транзитивных графов имеет прикладной интерес, связанный с разработкой архитектур многомашинных и многопроцессорных вычислительных систем, топологии однородных вычислительных сред, оптимальных с точки зрения их связности, структурной надежности и живучести [7].

В данной работе приведены результаты алгоритмического исследования симметрии транзитивных связных графов степени 3, 4, 5, 6 и 7 с числом вершин соответственно до 20, 18, 16, 16 и 16. Построены диаграммы указанных графов, определены цикловые индексы групп автоморфизмов графов, числа стабильности и выделены графы, имеющие комбинаторно-эквивалентные группы. Решена задача определения наименьшего числа вершин связного транзитивного графа степени C , для которого существует связный граф с комбинаторно-эквивалентной группой и степенью C , где $C = 3, 4, 5, \dots$ и т. д. Кроме того, предложен метод построения сильнорегулярных графов с любым заданным числом тождественной стабильности графа.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Пусть G обозначает граф с множеством вершин $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ и ребер $E(G) = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. Обозначим через $\text{Aut}(G)$ группу автоморфизмов графа G , а через $\text{Aut}(G, v)$ стабилизатор вершины $v \in V(G)$. Стабилизатором вершины v группы $\text{Aut}(G)$ называется подгруппа $\text{Aut}(G, v)$, для которой справедливо

$$\text{Aut}(G, v) = \{g \in \text{Aut}(G) : g(v) = v\}.$$

Стабилизатором подмножества вершин $V^0 \subseteq V$ группы $\text{Aut}(G)$ называется подгруппа $\text{Aut}(G, V^0)$, для которого справедливо

$$\text{Aut}(G, V^0) = \bigcap_{v \in V^0} \text{Aut}(G, v).$$

Орбитой вершины $v \in V$ группы $\text{Aut}(G)$ называется подмножество вершин $\Theta(\text{Aut}(G), v)$ графа G , которые могут быть отображены на вершину v , т. е.

$$\Theta(\text{Aut}(G), v) = \{v' : \exists g \in \text{Aut}(G) [g(v') = v]\}.$$

Граф, у которого все вершины принадлежат одной орбите, называется транзитивным.

Экстремальным подмножеством нетождественной стабильности графа G будем называть подмножество вершин V_1 , для которого справедливо

$$(\text{Aut}(G, V_1) \approx E_n) \vee (\forall v \in V \setminus V_1 : (\text{Aut}(G, V_1 \cup \{v\}) \approx E_n)),$$

где E_n — тождественная группа степени n . Аналогично, экстремальным подмножеством тождественной стабильности графа G будем называть подмножество вершин V_2 , для которого справедливо

$$(\text{Aut}(G, V_2) \approx E_n) \wedge (\forall v \in V_2 : (\text{Aut}(G, V_2 \setminus \{v\}) \neq E_n)).$$

Обозначим через $TS = \{V_{2_i}\}$, $i \in I$, множество всех экстремальных подмножеств тождественной стабильности графа G , а через $NTS = \{V_{1_j}\}$, $j \in J$, множество всех экстремальных подмножеств нетождественной стабильности графа G . Тогда согласно [8]

$$\psi = \min_{V_{2_i} \in TS} |V_{2_i}|$$

будет числом тождественной стабильности графа, а

$$\chi = \max_{V_{1_j} \in NTS} |V_{1_j}|$$

— числом нетождественной стабильности графа.

Под цикловым индексом группы автоморфизмов понимают многочлен от переменных z_1, z_2, \dots, z_n , определяемый формулой

$$Z(\text{Aut}(G)) = |\text{Aut}(G)|^{-1} \sum_{\alpha \in \text{Aut}(G)} \prod_{g=1}^n z_g^{c_g(\alpha)},$$

где $c_g(\alpha)$ — число циклов длины g в представлении автоморфной подстановки посредством произведения непересекающихся циклов. Графы G_1 и G_2 имеют комбинаторно-эквивалентные группы, если цикловые индексы их групп автоморфизмов совпадают.

Пусть расстояние между вершинами $v, u \in V(G)$ обозначается через $d(v, u)$. Говорят, что группа Γ действует дистанционно-транзитивно на графе G , если для любых вершин x, y, u, v таких, что $d(x, y) = d(u, v)$ найдется элемент $\alpha \in \Gamma$, для которого $\alpha(x) = u$, $\alpha(y) = v$. Граф, допускающий дистанционно транзитивное действие некоторой группы Γ , а значит и своей группы автоморфизмов, называется дистанционно-транзитивным. Сильнорегулярным графом $G(n, C, \lambda, w)$ называется n -вершинный однородный граф

Таблица 1

Номер графа	n.C.N.	[Aut(G)]	φ	χ	Номер графа	n.C.N.	[Aut(G)]	φ	χ
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	1.0.1	1	0	0	55	11.6.2	22	2	1
2	2.1.1	2	1	0	56	11.8.1	22	2	1
3	3.2.1	6	2	1	57	11.10.1	11!	10	9
4	4.2.1	8	2	2	58	12.2.1	24	2	2
5	4.3.1	24	3	2	59	12.3.1	24	2	2
6	5.2.1	10	2	1	60	12.3.2	24	2	4
7	5.4.1	120	4	3	61	12.3.3	24	2	2
8	6.2.1	12	2	2	62	12.3.4	48	3	8
9	6.3.1	12	2	2	63	12.4.1	24	2	2
10	6.3.2	72	4	4	64	12.4.2	24	2	2
11	6.4.1	48	3	4	65	12.4.3	24	2	2
12	6.5.1	720	5	4	66	12.4.4	24	2	2
13	7.2.1	14	2	1	67	12.4.5	48	3	8
14	7.4.1	14	2	1	68	12.4.6	48	2	6
15	7.6.1	5 040	6	5	69	12.4.7	48	2	6
16	8.2.1	16	2	2	70	12.4.8	48	2	4
17	8.3.1	16	2	2	71	12.4.9	144	4	8
18	8.3.2	48	3	4	72	12.4.10	768	6	10
19	8.4.1	16	2	2	73	12.5.1	12	1	0
20	8.4.2	48	3	4	74	12.5.2	12	1	0
21	8.4.3	1 152	6	6	75	12.5.3	24	2	2
22	8.5.1	16	2	2	76	12.5.4	24	2	2
23	8.5.2	128	4	6	77	12.5.5	24	2	2
24	8.6.1	384	4	6	78	12.5.6	48	2	4
25	8.7.1	9 216	7	6	79	12.5.7	48	2	6
26	9.2.1	18	2	1	80	12.5.8	96	3	8
27	9.4.1	18	2	1	81	12.5.9	120	3	4
28	9.4.2	18	2	1	82	12.5.10	144	3	6
29	9.4.3	72	3	3	83	12.5.11	768	6	10
30	9.6.1	18	2	1	84	12.5.12	1 440	5	8
31	9.6.2	1 296	6	7	85	12.6.1	12	1	0
32	9.8.1	82 944	8	7	86	12.6.2	12	1	0
33	10.2.1	20	2	2	87	12.6.3	24	2	2
34	10.3.1	20	2	2	88	12.6.4	24	2	2
35	10.3.2	20	2	2	89	12.6.5	24	2	2
36	10.3.3	120	3	4	90	12.6.6	48	2	4
37	10.4.1	20	2	2	91	12.6.7	48	2	6
38	10.4.2	240	4	6	92	12.6.8	96	3	8
39	10.4.3	320	5	8	93	12.6.9	120	3	4
40	10.5.1	20	2	2	94	12.6.10	144	3	6
41	10.5.2	240	4	6	95	12.6.11	768	6	10
42	10.5.3	320	5	8	96	12.6.12	1 440	5	8
43	10.5.4	28 800	8	8	97	12.6.13	2·6!²	10	10
44	10.6.1	20	2	2	98	12.7.1	24	2	2
45	10.6.2	20	2	2	99	12.7.2	24	2	2
46	10.6.3	120	3	4	100	12.7.3	24	2	2
47	10.7.1	20	2	2	101	12.7.4	24	2	2
48	10.7.2	200	4	6	102	12.7.5	48	3	8
49	10.8.1	3 800	5	8	103	12.7.6	48	2	6
50	10.9.1	40!	9	8	104	12.7.7	48	2	6
51	11.2.1	22	2	1	105	12.7.8	48	2	4
52	11.4.1	22	2	1	106	12.7.9	144	4	8
53	11.6.1	22	2	1	107	12.7.10	768	6	10
54	11.6.1	22	2	1	108	12.7.11	2·48²	6	10

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
109	12.8.1	24	2	2	166	14.7.9	2·71 ²	12	12
110	12.8.2	24	2	4	167	14.8.1	14	1	0
111	12.8.3	24	2	2	168	14.8.2	28	2	2
112	12.8.4	48	3	8	169	14.8.3	28	2	2
113	12.8.5	288	4	10	170	14.8.4	28	2	2
114	12.8.6	10 368	8	10	171	14.8.5	28	2	2
115	12.8.7	3 ₈ ·24 ³	9	10	172	14.8.6	1 792	7	12
116	12.9.1	24	2	2	173	14.9.1	28	2	2
117	12.9.2	288	4	8	174	14.9.2	28	2	2
118	12.9.3	3 072	6	10	175	14.9.3	28	2	2
119	12.9.4	31 104	9	10	176	14.9.4	336	3	6
120	12.10.1	46 080	6	10	177	14.9.5	392	4	8
121	12.11.1	12!	11	10	178	14.9.6	1 792	7	12
122	13.2.1	26	2	1	179	14.10.1	28	2	2
123	13.4.1	26	2	1	180	14.10.2	28	2	2
124	13.4.2	26	2	1	181	14.10.3	336	3	6
125	13.4.3	52	2	1	182	14.11.1	28	2	2
126	13.6.1	26	2	1	183	14.11.2	392	4	8
127	13.6.2	26	2	1	184	14.12.1	645 120	7	12
128	13.6.3	26	2	1	185	14.13.1	141	13	12
129	13.6.4	78	2	1	186	15.2.1	30	2	1
130	13.8.1	26	2	1	187	15.4.1	30	2	1
131	13.8.2	26	2	1	188	15.4.2	30	2	1
132	13.10.1	26	2	1	189	15.4.3	30	2	1
133	13.10.2	26	2	1	190	15.4.4	30	2	1
134	13.12.1	13!	12	11	191	15.4.5	60	2	5
135	14.2.1	28	2	2	192	15.4.6	60	2	5
136	14.3.1	28	2	2	193	15.4.7	120	2	3
137	14.3.2	28	2	2	194	15.6.1	30	2	1
138	14.3.3	336	3	6	195	15.6.2	30	2	1
139	14.4.1	28	2	2	196	15.6.3	30	2	1
140	14.4.2	28	2	2	197	15.6.4	30	2	1
141	14.4.3	28	2	2	198	15.6.5	30	2	1
142	14.4.4	336	3	6	199	15.6.6	30	2	1
143	14.4.5	1 792	7	12	200	15.6.7	30	2	1
144	14.5.1	14	1	0	201	15.6.8	60	2	5
145	14.5.2	28	2	2	202	15.6.9	60	2	5
146	14.5.3	28	2	2	203	15.6.10	720	4	7
147	14.5.4	28	2	2	204	15.6.11	720	4	9
148	14.5.5	28	2	2	205	15.6.12	77 760	10	13
149	14.5.6	1 792	7	12	206	15.8.1	30	2	1
150	14.6.1	14	1	0	207	15.8.2	30	2	1
151	14.6.2	28	2	2	208	15.8.3	30	2	1
152	14.6.3	28	2	2	209	15.8.4	30	2	1
153	14.6.4	28	2	2	210	15.8.5	30	2	1
154	14.6.5	28	3	2	211	15.8.6	30	2	1
155	14.6.6	28	2	2	212	15.8.7	30	2	1
156	14.6.7	28	2	2	213	15.8.8	60	2	5
157	14.6.8	10 080	6	10	214	15.8.9	60	2	5
158	14.7.1	14	1	0	215	15.8.10	720	4	7
159	14.7.2	28	2	2	212	15.8.11	720	4	9
160	14.7.3	28	2	2	217	15.8.12	77 760	10	13
161	14.7.4	28	2	2	218	15.10.1	30	2	1
162	14.7.5	28	2	2	219	15.10.2	30	2	1
163	14.7.6	28	2	2	220	15.10.3	30	2	1
164	14.7.7	28	2	2	221	15.10.4	30	2	1
165	14.7.8	10 080	6	10	222	15.10.5	60	2	5

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
223	15.10.6	60	2	5	236	16.4.2	32	2	2
224	15.10.7	120	2	3	237	16.4.3	32	2	2
225	15.10.8	3!·5!³	12	13	238	16.4.4	32	2	2
226	15.12.1	30	2	1	239	16.4.5	32	2	2
227	15.12.2	6 000	6	11	240	16.4.6	32	2	2
228	15.12.3	5!·3!³	12	13	241	16.4.7	32	2	2
229	15.14.1	15!	14	13	242	16.4.8	32	2	2
230	16.2.1	32	2	2	243	16.4.9	64	2	2
231	16.3.1	32	2	2	244	16.4.10	128	4	12
232	16.3.2	32	2	4	245	16.4.11	128	4	12
233	16.3.3	96	2	4	246	16.4.12	384	3	8
234	16.3.4	128	4	12	247	16.4.13	4 096	8	14
235	16.4.1	16	1	0					

степени C , в котором любая пара смежных вершин имеет λ общих соседей, а любая пара несмежных — ω общих соседей. Все неопределяемые далее понятия можно найти в [9].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В табл. 1 приведены числа симметрии и числа стабильности связных транзитивных графов с числом вершин до 16. Одной из характеристик, наиболее полно отражающих свойства симметрии графа, является цикловой индекс его группы автоморфизмов. Изучение циклового строения группы и классов сопряженности — центральная алгебраическая задача, возникающая в теории перечисления и находящая многочисленные применения [10]. В табл. 2 приведены цикловые индексы групп автоморфизмов исследованных графов. При записи цикловых индексов использовано сокращение

$$\prod_{g=1}^n z_g^{c_g(\alpha)} = z_1^{c_1(\alpha)} * z_2^{c_2(\alpha)} * \dots * z_n^{c_n(\alpha)} = \\ = 1(c_1(\alpha)) x_2(c_2(\alpha)) x \dots x_n(c_n(\alpha)).$$

Результаты исследования привели к выделению классов транзитивных графов каждой степени на основе различия цикловых индексов их групп автоморфизмов. Выделение графов с совпадающими значениями цикловых индексов для транзитивных графов степени 3, 4 и 5 позволило решить задачу определения наименьшего числа вершин транзитивного графа любой степени, для которого существует граф той же степени с комбинаторно-эквивалентной группой. Пусть $E(C, p)$ обозначает наименьшее число вершин связного транзитивного графа степени C , для которого существует граф той же степени с комбинаторно-эквивалентной группой. Тогда справедлива

Таблица 2

№	Цикловой индекс группы графа	Номер графа
1	2	3

Транзитивные графы степени 3

3.1	$Z(S_4)$	4.3.1
3.2	$(1/12) (1 \times 1(6) + 2 \times 3(2) + 4 \times 2(3) + 2 \times 6(1) + 3 \times 1(2) \times 2(2))$	6.3.1
3.3	$(1/72) (1 \times 1(6) + 12 \times 6(1) + 6 \times 2(3) + 4 \times 3(2) + 9 \times 1(2) \times 2(2) + 6 \times 1(4) \times 2(1) + 4 \times 1(3) \times 3(1) + 18 \times 2(1) \times 4(1) + 12 \times 1(1) \times 2(1) \times 3(1))$	6.3.2
3.4	$(1/16) (1 \times 1(8) + 5 \times 2(4) + 4 \times 8(1) + 2 \times 4(2) + 4 \times 1(2) \times 2(3))$	8.3.1
3.5	$(1/48) (1 \times 1(8) + 13 \times 2(4) + 12 \times 4(2) + 6 \times 1(4) \times 2(2) + 8 \times 1(2) \times 3(2) + 8 \times 2(1) \times 6(1))$	8.3.2
3.6	$(1/20) (1 \times 1(10) + 4 \times 5(2) + 6 \times 2(5) + 4 \times 10(1) + 5 \times 1(2) \times 2(4))$	10.3.1, 10.3.2
3.7	$\approx Z(S_5)$	10.3.3
3.8	$(1/24) (1 \times 1(12) + 12 \times 2(6) + 2 \times 3(4) + 6 \times 6(2) + 3 \times 1(4) \times 2(4))$	12.3.2
3.9	$(1/24) (1 \times 1(12) + 7 \times 2(6) + 2 \times 3(4) + 2 \times 4(3) + 2 \times 6(2) + 4 \times 12(1) + 6 \times 1(2) \times 2(5))$	12.3.1
3.10	$(1/24) (1 \times 1(12) + 3 \times 2(6) + 8 \times 3(4) + 6 \times 4(3) + 6 \times 1(2) \times 2(5))$	12.3.3
3.11	$(1/48) (1 \times 1(12) + 13 \times 2(6) + 8 \times 3(4) + 8 \times 6(2) + 3 \times 1(8) \times 2(2) + 3 \times 1(4) \times 2(4) + 12 \times 2(2) \times 4(2))$	12.3.4
3.12	$(1/28) (1 \times 1(14) + 6 \times 7(2) + 8 \times 2(7) + 6 \times 14(1) + 7 \times 1(2) \times 2(6))$	14.3.1, 14.3.2
3.13	$(1/336) (1 \times 1(14) + 28 \times 2(7) + 48 \times 7(2) + 56 \times 1(2) \times 3(4) + 21 \times 1(6) \times 2(4) + 56 \times 2(1) \times 6(2) + 42 \times 1(2) \times 2(2) \times 4(2) + 84 \times 2(1) \times 4(1) \times 8(1))$	14.3.3
3.14	$(1/32) (1 \times 1(16) + 15 \times 2(8) + 8 \times 8(2) + 4 \times 4(4) + 4 \times 1(4) \times 2(6))$	16.3.2
3.15	$(1/32) (1 \times 1(16) + 9 \times 2(8) + 8 \times 16(1) + 4 \times 8(2) + 2 \times 4(4) + 8 \times 1(2) \times 2(7))$	16.3.1
3.16	$(1/96) (1 \times 1(16) + 19 \times 2(8) + 24 \times 8(2) + 8 \times 4(4) + 12 \times 1(4) \times 2(6) + 8 \times 1(4) \times 3(4) + 16 \times 4(1) \times 12(1) + 8 \times 2(2) \times 6(2))$	16.3.3
3.17	$(1/128) (1 \times 1(16) + 28 \times 4(4) + 29 \times 2(8) + 16 \times 8(2) + 4 \times 1(12) \times 2(2) + 6 \times 1(8) \times 2(4) + 4 \times 1(4) \times 2(6) + 40 \times 2(4) \times 4(2))$	16.3.4
3.18	$(1/18) (1 \times 1(18) + 9 \times 2(9) + 6 \times 9(2) + 2 \times 3(6))$	18.3.1
3.19	$(1/36) (1 \times 1(18) + 10 \times 2(9) + 6 \times 9(2) + 6 \times 18(1) + 2 \times 6(3) + 9 \times 1(2) \times 2(8))$	18.3.3
3.20	$(1/72) (1 \times 1(18) + 8 \times 3(6) + 6 \times 2(9) + 12 \times 6(3) + 6 \times 1(6) \times 2(6) + 9 \times 1(2) \times 2(8) + 12 \times 3(2) \times 6(2) + 18 \times 2(1) \times 4(4))$	18.3.4
3.21	$(1/216) (1 \times 1(18) + 18 \times 2(9) + 36 \times 6(3) + 14 \times 3(6) + 18 \times 1(4) \times 2(7) + 9 \times 1(6) \times 2(6) + 12 \times 1(3) \times 3(5) + 18 \times 2(3) \times 4(3) + 36 \times 6(1) \times 12(1) + 18 \times 3(2) \times 6(2) + 36 \times 1(4) \times 2(1) \times 3(1) \times 6(2))$	18.3.5

1	2	3
Транзитивные графы степени 4		
4.1	$Z(S_5)$	5.4.1
4.2	$(1/48) (1 \times 1(6) + 8 \times 6(1) + 8 \times 3(2) + 7 \times 2(3) + 9 \times 1(2) \times 2(2) + 6 \times 1(2) \times 4(1) + 3 \times 1(4) \times 2(1) + 6 \times 2(1) \times 4(1))$	6.4.1
4.3	$(1/14) (1 \times 1(7) + 6 \times 7(1) + 7 \times 1(1) \times 2(3))$	7.4.1
4.4	$(1/16) (1 \times 1(8) + 5 \times 2(4) + 4 \times 8(1) + 2 \times 4(2) + 4 \times 1(2) \times 2(3))$	8.4.1
4.5	$= 3.5$	8.4.2
4.6	$(1/1152) (1 \times 1(8) + 144 \times 8(1) + 108 \times 4(2) + 33 \times 2(4) + 64 \times 1(2) \times 3(2) + 16 \times 1(5) \times 3(1) + 42 \times 1(4) \times 2(2) + 36 \times 1(2) \times 2(3) + 12 \times 1(6) \times 2(1) + 12 \times 1(4) \times 4(1) + 192 \times 2(1) \times 6(1) + 180 \times 2(2) \times 4(1) + 96 \times 1(3) \times 2(1) \times 3(1) + 96 \times 1(1) \times 3(1) \times 4(1) + 48 \times 1(1) \times 2(2) \times 3(1) + 72 \times 1(2) \times 2(1) \times 4(1))$	8.4.3
4.7	$(1/18) (1 \times 1(9) + 6 \times 9(1) + 2 \times 3(3) + 9 \times 1(1) \times 2(4))$	9.4.1, 9.4.2
4.8	$(1/72) (1 \times 1(9) + 8 \times 3(3) + 12 \times 1(3) \times 2(3) + 9 \times 1(1) \times 2(4) + 18 \times 1(1) \times 4(2) + 24 \times 3(1) \times 6(1))$	9.4.3
4.9	$= 3.6$	10.4.1
4.10	$(1/240) (1 \times 1(10) + 24 \times 10(1) + 26 \times 2(5) + 24 \times 5(2) + 10 \times 1(6) \times 2(2) + 20 \times 1(4) \times 3(2) + 30 \times 1(2) \times 4(2) + 15 \times 1(2) \times 2(4) + 40 \times 2(2) \times 6(1) + 30 \times 2(1) \times 4(2) + 20 \times 2(2) \times 3(2))$	10.4.2
4.11	$(1/320) (1 \times 1(10) + 21 \times 2(5) + 64 \times 10(1) + 64 \times 5(2) + 25 \times 1(2) \times 2(4) + 20 \times 1(2) \times 4(2) + 10 \times 1(6) \times 2(2) + 10 \times 1(4) \times 2(3) + 5 \times 1(8) \times 2(1) + 40 \times 2(3) \times 4(1) + 20 \times 2(1) \times 4(2) + 40 \times 1(2) \times 2(2) \times 4(1))$	10.4.3
4.12	$(1/22) (1 \times 1(11) + 10 \times 11(1) + 11 \times 1(11) \times 2(5))$	11.4.1, 11.4.0
4.13	$= 3.9$	12.4.1, 12.4.2, 12.4.3
4.14	$= 3.10$	12.4.4
4.15	$= 3.11$	12.4.5
4.16	$(1/48) (1 \times 1(12) + 12 \times 2(6) + 8 \times 4(3) + 2 \times 3(4) + 6 \times 6(2) + 4 \times 12(1) + 2 \times 1(6) \times 2(3) + 3 \times 1(4) \times 2(4) + 6 \times 1(2) \times 2(5) + 4 \times 3(2) \times 6(1))$	12.4.7
4.17	$(1/48) (1 \times 1(12) + 12 \times 4(3) + 8 \times 3(4) + 8 \times 6(2) + 4 \times 2(6) + 12 \times 1(2) \times 2(5) + 3 \times 1(4) \times 2(4))$	12.4.8
4.18	$(1/144) (1 \times 1(12) + 28 \times 2(6) + 28 \times 6(2) + 4 \times 3(4) + 4 \times 3(4) + 4 \times 1(6) \times 3(2) + 6 \times 1(8) \times 2(2) + 9 \times 1(4) \times 2(4) + 16 \times 2(3) \times 6(1) + 36 \times 2(2) \times 4(2) + 12 \times 1(2) \times 2(2) \times 3(2))$	12.4.9

1	2	3
4.19	$(1/768) (1 \times 1(4) + 45 \times 2(6) + 64 \times 12(1) + 96 \times 6(2) + 32 \times 4(3) + 32 \times 3(4) + 20 \times 1(6) \times 2(3) + 27 \times 1(4) \times 2(4) + 15 \times 1(8) \times 2(2) + 6 \times 1(10) \times 2(1) + 30 \times 1(2) \times 2(5) + 12 \times 1(4) \times 4(2) + 108 \times 2(2) \times 4(2) + 120 \times 2(4) \times 4(1) + 64 \times 3(2) \times 6(1) + 64 \times 3(2) \times 6(1) + 24 \times 1(2) \times 2(1) \times 4(2) + 48 \times 1(2) \times 4(1) + 48 \times 1(2) \times 2(3) \times 4(1) + 24 \times 1(4) \times 2(2) \times 4(1))$	12.4.40
4.20	$(1/26) (1 \times 1(13) + 12 \times 13(1) + 13 \times 1(1) \times 2(6))$	13.4.1, 13.4.2
4.21	$(1/52) (1 \times 1(13) + 12 \times 13(1) + 13 \times 1(1) \times 2(6) + 26 \times 1(1) \times 4(3))$	13.4.3
4.22	$= 3.12$	14.4.3
4.23	$= 3.13$	14.4.4
4.24	$(1/1792) (1 \times 1(14) + 384 \times 14(1) + 57 \times 2(7) + 384 \times 7(2) + 56 \times 1(2) \times 4(3) + 53 \times 1(2) \times 2(6) + 21 \times 1(10) \times 2(2) + 35 \times 1(8) \times 2(3) + 35 \times 1(6) \times 2(4) + 7 \times 1(12) \times 2(1) + 21 \times 1(4) \times 2(5) + 56 \times 2(1) \times 4(3) + 168 \times 2(3) \times 4(2) + 168 \times 2(5) \times 4(1) + 168 \times 1(2) \times 2(4) \times 4(1))$	14.4.5
4.25	$(1/30) (1 \times 1(15) + 8 \times 15(1) + 4 \times 5(3) + 2 \times 3(5) + 15 \times 1(1) \times 2(7))$	15.4.1, 15.4.2, 15.4.3, 15.4.4
4.26	$(1/60) (1 \times 1(15) + 4 \times 5(3) + 2 \times 3(5) + 8 \times 15(1) + 15 \times 1(1) \times 2(7) + 5 \times 1(3) \times 2(6) + 3 \times 1(5) \times 2(5) + 12 \times 5(4) \times 10(1) + 10 \times 3(4) \times 6(2))$	15.4.5, 15.4.6
4.27	$(1/120) (1 \times 1(15) + 20 \times 3(5) + 25 \times 1(3) \times 2(6) + 24 \times 5(3) + 20 \times 3(4) \times 6(2) + 30 \times 1(1) \times 2(1) \times 4(3))$	15.4.7
4.28	$(1/16) (1 \times 1(16) + 9 \times 2(8) + 2 \times 4(4) + 4 \times 8(2))$	16.4.1
4.29	$(1/32) (1 \times 1(16) + 17 \times 2(8) + 12 \times 4(4) + 2 \times 1(8) \times 3(4))$	16.4.2, 16.4.3
4.30	$(1/32) (1 \times 1(16) + 8 \times 16(1) + 9 \times 2(8) + 4 \times 8(2) + 2 \times 4(4) + 8 \times 1(2) \times 2(7))$	16.4.4, 16.4.5, 16.4.6, 16.4.7, 16.4.8
4.31	$(1/64) (1 \times 1(16) + 16 \times 8(2) + 21 \times 2(8) + 16 \times 4(4) + 8 \times 1(4) \times 2(6) + 2 \times 1(8) \times 2(4))$	16.4.9
4.32	$(1/128) (1 \times 1(16) + 29 \times 2(8) + 16 \times 8(2) + 28 \times 4(4) + 4 \times 1(12) \times 2(2) + 6 \times 1(8) \times 2(4) + 4 \times 1(4) \times 2(6) + 40 \times 2(4) \times 4(2))$	16.4.11
4.33	$(1/384) (1 \times 1(16) + 48 \times 8(2) + 84 \times 4(4) + 51 \times 2(8) + 32 \times 1(4) \times 3(4) + 12 \times 1(8) \times 2(4) + 12 \times 1(4) \times 2(6) + 96 \times 2(2) \times 6(2) + 48 \times 1(2) \times 2(1) \times 4(3))$	16.4.12
4.34	$(1/4096) (1 \times 1(16) + 208 \times 4(4) + 113 \times 2(8) + 512 \times 16(1) + 640 \times 8(2) + 72 \times 1(2) \times 2(7) + 56 \times 1(10) \times 2(3) + 70 \times 1(8) \times 2(4) + 56 \times 1(6) \times 2(5) + 28 \times 1(12) \times 2(2) + 60 \times 1(4) \times 2(6) + 56 \times 1(6) \times 2(5) + 28 \times 1(12) \times 2(2) + 60 \times 1(4) \times 2(6) + 8 \times 1(14) \times 2(1) + 32 \times 1(4) \times 4(3) + 416 \times 2(6) \times 4(1) + 576 \times 2(4) \times 4(2) + 352 \times 2(2) \times 4(3) + 256 \times 4(2) \times 8(1) + 192 \times 1(2) \times 2(3) \times 4(2) + 64 \times 1(2) \times 2(1) \times 4(3) + 192 \times 1(2) \times 2(5) \times 4(1) + 96 \times 1(4) \times 2(2) \times 4(2) + 96 \times 1(4) \times 2(4) \times 4(1))$	16.4.13

1	2	3
Транзитивные графы степени 5		
5.1	$Z(S_6)$	6.5.1
5.2	$(1/16) (1 \times 1(8) + 5 \times 2(4) + 4 \times 8(1) + 2 \times 4(2) + 4 \times$ $\times 1(2) \times 2(3))$	8.5.1
5.3	$(1/128) (1 \times 1(8) + 17 \times 2(4) + 28 \times 4(2) + 16 \times 8(1) +$ $+ 10 \times 1(4) \times 2(2) + 4 \times 1(6) \times 2(1) + 4 \times 1(4) \times 4(1) +$ $+ 12 \times 1(2) \times 2(1) \times 4(1) + 28 \times 2(2) \times 4(1) + 8 \times 1(2) \times$ $\times 4(1))$	8.5.2
5.4	$(1/20) (1 \times 1(10) + 6 \times 2(5) + 4 \times 10(1) + 4 \times 5(2) + 5 \times$ $\times 1(2) \times 2(4))$	10.5.1
5.5	$= 4.10$	10.5.2
5.6	$= 4.11$	10.5.3
5.7	$(1/28800) (1 \times 1(10) + 2880 \times 10(1) + 120 \times 2(5) + 576 \times$ $\times 5(2) + 400 \times 1(4) \times 3(2) + 40 \times 1(7) \times 3(1) + 900 \times$ $\times 1(2) \times 4(2) + 60 \times 1(6) \times 4(1) + 225 \times 1(2) \times 2(4) +$ $+ 300 \times 1(4) \times 2(3) + 130 \times 1(6) \times 2(2) + 20 \times 1(8) \times$ $\times 2(1) + 48 \times 1(5) \times 5(1) + 1800 \times 2(1) \times 4(2) + 3600 \times$ $\times 2(1) \times 8(1) + 2400 \times 2(2) \times 6(1) + 1200 \times 2(3) \times 4(1) +$ $+ 400 \times 2(2) \times 3(2) + 960 \times 1(2) \times 3(1) \times 5(1) + 1200 \times$ $\times 1(3) \times 3(1) \times 4(1) + 800 \times 1(2) \times 2(1) \times 3(2) + 1000 \times$ $\times 1(3) \times 2(2) \times 3(1) + 440 \times 1(5) \times 2(1) \times 3(1) + 1440 \times$ $\times 1(4) \times 4(1) \times 5(1) + 900 \times 1(2) \times 2(2) \times 4(1) + 600 \times$ $\times 1(4) \times 2(1) \times 4(1) + 720 \times 1(1) \times 2(2) \times 5(1) + 600 \times$ $\times 1(1) \times 2(3) \times 3(1) + 480 \times 1(3) \times 2(1) \times 5(1) + 960 \times$ $\times 2(1) \times 3(1) \times 5(1) + 1200 \times 1(4) \times 2(4) \times 3(1) \times 4(1))$	10.5.4
5.8	$(1/12) (1 \times 1(12) + 7 \times 2(6) + 2 \times 6(2) + 2 \times 3(4))$	12.5.1, 12.5.2
5.9	$= 3.9 = 4,13$	12.5.3, 12.5.4, 12.5.5
5.10	$= 4.16$	12.5.6
5.11	$(1/48) (1 \times 1(12) + 12 \times 4(3) + 8 \times 6(2) + 8 \times 3(4) + 4 \times$ $\times 2(6) + 3 \times 1(4) \times 2(4) + 12 \times 1(2) \times 2(5))$	12.5.7
5.12	$(1/96) (1 \times 1(12) + 24 \times 6(2) + 8 \times 3(4) + 27 \times 2(6) + 9 \times$ $\times 1(4) \times 2(4) + 6 \times 1(4) \times 4(2) + 3 \times 1(8) \times 2(2) + 18 \times$ $\times 2(2) \times 4(2))$	12.5.8
5.13	$(1/120) (1 \times 1(12) + 20 \times 6(2) + 20 \times 3(4) + 16 \times 2(6) +$ $+ 24 \times 1(2) \times 5(2) + 15 \times 1(4) \times 2(4) + 24 \times 2(1) \times 10(1))$	12.5.9
5.14	$(1/144) (1 \times 1(12) + 12 \times 2(6) + 24 \times 4(3) + 18 \times 3(4) +$ $+ 6 \times 6(2) + 12 \times 12(1) + 18 \times 1(2) \times 2(5) + 3 \times 1(4) \times$ $\times 2(4) + 6 \times 1(6) \times 2(3) + 8 \times 1(3) \times 3(3) + 12 \times 3(2) \times$ $\times 6(1) + 24 \times 1(4) \times 2(1) \times 3(1) \times 6(1))$	12.5.10
5.15	$= 4.19$	12.5.11
5.16	$(1/1440) (1 \times 1(12) + 280 \times 6(2) + 91 \times 2(6) + 40 \times 3(4) +$ $+ 45 \times 1(4) \times 2(4) + 90 \times 1(4) \times 4(2) + 144 \times 1(2) \times$ $\times 5(2) + 15 \times 1(8) \times 2(2) + 40 \times 1(6) \times 3(2) + 270 \times$ $\times 2(2) \times 4(2) + 144 \times 2(1) \times 10(1) + 160 \times 2(3) \times 6(1) +$ $+ 120 \times 1(2) \times 2(2) \times 3(2))$	12.5.12
5.17	$(1/14) (1 \times 1(14) + 7 \times 2(7) + 6 \times 7(2))$	14.5.1

1	2	3
5.18	$= 3.12 = 4.22$	14.5.2, 14.5.3, 14.5.4, 14.5.5
5.19	$= 4.24$	14.5.6

Транзитивные графы степени 6

6.1	$Z(S_7)$	7.6.1
6.2	$(1/384) (1 \times 1(8) + 60 \times 4(2) + 48 \times 8(1) + 25 \times 2(4) +$ $+ 28 \times 1(2) \times 2(3) + 32 \times 1(2) \times 3(2) + 32 \times 1(2) \times$ $\times 6(1) + 18 \times 1(4) \times 2(2) + 12 \times 1(4) \times 4(1) + 4 \times 1(6) \times$ $\times 2(1) + 32 \times 2(1) \times 3(2) + 32 \times 2(1) \times 6(1) + 36 \times$ $\times 2(2) \times 4(1) + 24 \times 1(2) \times 2(1) \times 4(1))$	8.6.1 9.6.1
6.3	$(1/18) (1 \times 1(9) + 6 \times 9(1) + 2 \times 3(3) + 9 \times 1(1) \times 2(4))$	9.6.1
6.4	$(1/1296) (1 \times 1(9) + 144 \times 9(1) + 80 \times 3(3) + 45 \times 1(3) \times$ $\times 2(3) + 27 \times 1(5) \times 2(2) + 54 \times 1(1) \times 2(4) + 9 \times 1(7) \times$ $\times 2(1) + 12 \times 1(3) \times 3(2) + 6 \times 1(6) \times 3(1) + 36 \times 1(3) \times$ $\times 6(1) + 36 \times 2(3) \times 3(1) + 288 \times 3(1) \times 6(1) + 54 \times$ $\times 1(2) \times 2(2) \times 3(1) + 36 \times 1(1) \times 2(1) \times 3(2) + 36 \times$ $\times 1(4) \times 2(1) \times 3(1) + 162 \times 1(1) \times 2(2) \times 4(1) + 108 \times$ $\times 1(1) \times 2(1) \times 6(1) + 54 \times 1(3) \times 2(1) \times 4(1) + 108 \times$ $\times 2(1) \times 3(1) \times 4(1))$	9.6.2 10.6.1, 10.6.2
6.5	$= 3.6$	10.6.3
6.6	$\sim Z(S_5)$	11.6.1, 11.6.2
6.7	$= 4.12$	12.6.1, 12.6.2
6.8	$= 5.8$	12.6.3, 12.6.4, 12.6.5
6.9	$= 3.9 = 4.13 = 5.9$	12.6.6
6.10	$= 4.16 = 5.10$	12.6.7
6.11	$= 5.11$	12.6.8
6.12	$= 5.12$	12.6.9
6.13	$= 5.13$	12.6.10
6.14	$= 5.14$	12.6.11
6.15	$= 4.19 = 5.15$	12.6.12
6.16	$= 5.16$	12.6.13
6.17	$\sim Z(S_6)Z(S_6)$	13.6.1, 13.6.2, 13.6.3
6.18	$= 4.20$	13.6.4
6.19	$(1/78) (1 \times 1(13) + 12 \times 13(1) + 13 \times 1(1) \times 2(6) + 26 \times$ $\times 1(1) \times 6(2) + 26 \times 1(1) \times 3(4))$	14.6.1
6.20	$= 5.17$	

1	2	3
6.21	$= 3.12 = 4.22 = 5.18$	14.6.2, 14.6.3, 14.6.4, 14.6.5, 14.6.6, 14.6.7
6.22	$(1/10080) (1 \times 1(14) + 232 \times 2(7) + 720 \times 14(1) + 720 \times$ $\times 7(2) + 105 \times 1(6) \times 2(4) + 210 \times 1(6) \times 4(2) + 504 \times$ $\times 1(4) \times 5(2) + 280 \times 1(2) \times 3(4) + 840 \times 1(2) \times 6(2) +$ $+ 105 \times 1(2) \times 2(6) + 21 \times 1(10) \times 2(2) + 70 \times 1(8) \times$ $\times 3(2) + 700 \times 2(4) \times 6(1) + 840 \times 2(3) \times 4(2) + 1008 \times$ $\times 2(2) \times 10(1) + 1120 \times 2(1) \times 6(2) + 420 \times 4(2) \times 6(1) +$ $+ 210 \times 2(4) \times 3(2) + 504 \times 2(2) \times 5(2) + 420 \times 3(2) \times$ $\times 4(2) + 420 \times 1(4) \times 2(2) \times 3(2) + 630 \times 1(2) \times 2(2) \times$ $\times 4(2))$	14.6.8
6.23	$= 4.25$	15.6.1, 15.6.2, 15.6.3, 15.6.4, 15.6.5, 15.6.6, 15.6.7
6.24	$= 4.26$	15.6.8, 15.6.9
6.25	$(1/720) (1 \times 1(15) + 42 \times 3(5) + 24 \times 5(3) + 48 \times 15(1) +$ $+ 20 \times 1(6) \times 3(3) + 10 \times 1(9) \times 2(3) + 30 \times 1(3) \times$ $\times 4(3) + 45 \times 1(3) \times 2(6) + 45 \times 1(1) \times 2(7) + 3 \times 1(5) \times$ $\times 2(5) + 50 \times 3(3) \times 6(1) + 60 \times 3(1) \times 12(1) + 30 \times$ $\times 3(1) \times 6(2) + 72 \times 5(1) \times 10(1) + 20 \times 2(3) \times 3(3) +$ $+ 90 \times 1(1) \times 2(1) \times 4(3) + 60 \times 2(3) \times 3(1) \times 6(1) + 60 \times$ $\times 1(2) \times 2(2) \times 3(1) \times 6(1))$	15.6.10
6.26	$(1/720) (1 \times 1(15) + 144 \times 5(3) + 40 \times 3(5) + 40 \times 1(3) \times$ $\times 3(4) + 60 \times 1(3) \times 2(6) + 15 \times 1(7) \times 2(4) + 120 \times$ $\times 3(1) \times 6(2) + 180 \times 1(1) \times 2(1) \times 4(3) + 120 \times 1(1) \times$ $\times 2(1) \times 3(2) \times 6(1))$	15.6.11
6.27	$Z(\text{Aut}(C_5[\bar{C}_3]))$	15.6.12

Транзитивные графы степени 7

7.1	$Z(S_8)$	8.7.1
7.2	$Z(D_{10})$	10.7.1
7.3	$(1/200) (1 \times 1(10) + 40 \times 10(1) + 10 \times 2(5) + 16 \times 5(2) +$ $+ 25 \times 1(2) \times 2(4) + 10 \times 1(6) \times 2(2) + 8 \times 1(5) \times 5(1) +$ $+ 50 \times 2(1) \times 4(2) + 40 \times 1(1) \times 2(2) \times 5(1))$	10.7.2
7.4	$= 4.13$	12.7.2, 12.7.1, 12.7.3
7.5	$= 3.10 = 4.14$	12.7.4
7.6	$= 3.11 = 4.15$	12.7.5
7.7	$= 4.16 = 5.10 = 6.10$	12.7.6, 12.7.7

1	2	3
7.8	$= 4.17$	12.7.8
7.9	$= 4.18$	12.7.9
7.10	$4.19 = 5.15$	12.7.10
7.11	$\overline{Z(2K_3(\overline{K_2})l)}$	12.7.11
7.12	$= 6.20$	14.7.1
7.13	$= 3.12 = 4.22 = 5.18 = 6.21$	14.7.2, 14.7.3, 14.7.4, 14.7.5, 14.7.6, 14.7.7
7.14	$= 6.22$	14.7.8
7.15	$\overline{Z(\text{Aut}(K_7 \cup \overline{K_7}))}$	14.7.9

Транзитивные графы, получаемые из несвязных графов

8.1	$\overline{Z(S_9)}$	9.8.1
8.2	$\overline{Z(\text{Aut}(K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup K_2))}$	10.8.1
8.3	$\overline{Z(\text{Aut}((K_2 \times K_3) \cup (K_2 \times K_3)))}$	12.8.5
8.4	$\overline{Z(\text{Aut}(6.3.2. \cup 6.3.2))}$	12.8.6
8.5	$\overline{Z(\text{Aut}(K_4 \cup K_4 \cup K_4))}$	12.8.7
9.1	$\overline{Z(S_{10})}$	10.9.1
9.2	$\overline{Z(\text{Aut}(C_6 \cup C_6))}$	12.9.2
9.3	$\overline{Z(\text{Aut}(C_4 \cup C_4 \cup C_4))}$	12.9.3
9.4	$\overline{Z(\text{Aut}(K_3 \cup K_3 \cup K_3 \cup K_3))}$	12.9.4
9.5	$\overline{Z(\text{Aut}(7.4.1 \cup 7.4.1))}$	14.9.5
10.1	$\overline{Z(S_{11})}$	11.10.1
10.2	$\overline{Z(\text{Aut}(K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup K_2 \cup K_2))}$	12.10.1
10.3	$\overline{Z(\text{Aut}(K_5 \cup K_5 \cup K_5))}$	15.10.8
11.1	$\overline{Z(S_{12})}$	12.11.1
11.2	$\overline{Z(\text{Aut}(C_7 \cup C_7))}$	14.11.2
12.1	$\overline{Z(S_{13})}$	13.12.1
12.2	$\overline{Z(\text{Aut}(7K_2))}$	14.12.1
12.3	$\overline{Z(\text{Aut}(C_5 \cup C_5 \cup C_5))}$	15.12.2
12.4	$\overline{Z(\text{Aut}(5K_3))}$	15.12.3
13.1	$\overline{Z(S_{14})}$	14.13.1
14.1	$\overline{Z(S_{15})}$	15.14.1

Таблица 3

Параметры графа	Число симметрии	Φ	χ	Число максимальных подмножеств NTS
9.4.1.2	72	3	3	12
10.3.0.1	120	3	4	10
13.6.2.3	78	2	1	13
15.6.1.3	720	4	7	15
16.5.0.2	1 920	4	8	20
16.6.2.2	192	3	4	28
16.6.2.2	1 152	4	8	12
17.8.3.4	136	2	1	17
21.10.5.4	5 040	4	11	21
25.8.3.2	28 800	5	15	20
25.12.5.6	600	3	5	30
27.17.1.5	51 840	5	15	36
28.12.6.4	40 320	5	16	28

Теорема. Величина $E(C, p) = E(0, p) = E(1, p) = E(2, p) = 0$, а для остальных значений C равна:

$$E = (C, p) = \begin{cases} 10 & \text{при } C = 3; \\ 9 & \text{при } C = 4; \\ 12 & \text{при } C = 5; \\ C + 4 & \text{при } C = 6, 10, 14, \dots \text{ и т. д.}; \\ C + 5 & \text{при } C = 7, 9, 11, \dots \text{ и т. д.}; \\ C + 5 & \text{при } C = 8, 12, 16, \dots \text{ и т. д.} \end{cases}$$

Доказательство. Случаи $C = 0, 1$ и 2 тривиальны. Доказательство для $C = 3, 4$ и 5 обосновано существованием наименьших по числу вершин связных транзитивных графов с комбинаторно-эквивалентными группами с числами вершин 10, 9, 12 соответственно. Такими графами являются 10.3.1, 10.3.2; 9.4.1, 9.4.2; 12.4.1, 12.4.2, 12.4.3. Остальные случаи вытекают из справедливости условия, что граф и его дополнение имеют одну и ту же группу автоморфизмов, и существования связных транзитивных графов с комбинаторно-эквивалентными группами и числами вершин 10, 14, 18 и т. д. для $C = 3$; 12, 14, 16 и т. д. для $C = 4$; 13, 17, 21 и т. д. для $C = 5$. Доказательство закончено.

В табл. 3 приведены числа симметрии и числа стабильности для всех связных сильнорегулярных транзитивных графов с числом вершин до 29. Рассмотрим квадратную матрицу $k \times k$, элементами которой являются целые числа от 1 до $k \times k$. Поставим в соответствие каждому элементу матрицы вершину графа и будем считать смежными те вершины, номера которых расположены в одной и той же строке и, аналогично, одном и том же столбце матрицы. Очевидно, что таким образом построим сильно-

регулярный граф с параметрами $G(k \times k, 2k-2, k-2, 2)$. Теперь легко показать, что для любого числа $\psi \neq 1$ можно построить сильнорегулярный граф $G(k \times k, 2k-2, k-2, 2)$, для которого $k = \psi$. Необходимо отметить, что каждый граф данного семейства включает в качестве подграфов все графы этого же семейства меньшей размерности. Каждый граф указанного семейства можно получить, используя операцию декартова произведения k -вершинных полных графов.

В приложении приведены диаграммы связанных транзитивных графов, которые строились с помощью ЭВМ на основе учета орбит стабилизаторов и цикловых индексов групп автоморфизмов графов, множеств нетождественной стабильности и декомпозиции графов по операциям декартова, тензорного и лексикографического произведений. Диаграммы имеют прикладной интерес — их можно рассматривать в качестве каталога архитектур связи процессоров в вычислительных системах. Кроме того, усмотрение закономерностей расположения вершин и их связей для различных семейств транзитивных графов позволяет синтезировать бесконечные серии графов, являющихся моделями различных структур сетей связи с заданными характеристиками связности, надежности и живучести.

В заключение отметим, что изложенные здесь данные алгоритмического исследования графов являются дополнением к обширному списку свойств транзитивных графов и их графогрупповых характеристик, приведенных в [11]. Все результаты получены на основе программных модулей подсистемы «Изоморфизм — автоморфизм», вошедшей в пакет прикладных программ ГРАФ-ЕС, разработанный ВЦ СО АН СССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калужнин Л. А., Сточный А. А., Глазунов Н. М., Суцанский В. И. Вопросы развития алгебраических исследований с привлечением ЭВМ. — Кибернетика, 1983, № 2, с. 1—10.
2. Коксетер Т. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. — М.: Наука, 1980. — 340 с.
3. Кохов В. А., Ульяновский И. И. Исследование транзитивных графов, порожденных диаграммами Кели. — Тр. Моск. энерг. ин-та, 1981, вып. 556, с. 29—35.
4. Кохов В. А., Ульяновский И. И. Алгоритм конструктивного перечисления графов с определенной группой автоморфизмов. — Тр. Моск. энерг. ин-та, 1981, вып. 556, с. 36—42.
5. Иванов А. А. Комбинаторно-логические методы исследования дистанционно регулярных графов: Автореф. дис. физ.-мат. наук. — М., 1984. — 21 с.

6. Ерохина И. Д., Кохов В. А. Псевдодиаграммы Кели и их конструктивное перечисление.— В кн.: Тезисы докладов III Всесоюзного совещания «Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях». Ч. 2. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984, с. 47—49.
7. Димитриев Ю. К., Хорошевский В. Г. Вычислительные системы из мини-ЭВМ.— М.: Радио и связь, 1982.— 302 с.
8. Кохов В. А. О числах стабильности и спектре стабильности графа.— Тр. Моск. энерг. ин-та, 1979, вып. 415, с. 111—115.
9. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.— 300 с.
10. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов.— М.: Мир, 1977.— 320 с.
11. McKay B. D. Transitive Graphs With Fewer Than Twenty Vertices.— Mathematics of Computation, 1979, v. 33, N 147, p. 1101—1121.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

ДИАГРАММЫ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРАФОВ

В приложении приведены диаграммы связных транзитивных графов степени 3, 4, 5, 6 и 7 с числами вершин соответственно до 20, 18, 16, 16 и 16. Кроме того, даны диаграммы связных транзитивных графов степени 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14, которые строятся на основе несвязных транзитивных графов. В соответствии с нумерацией графов в табл. 1 графы, представленные на рис. 1—13, имеют следующее расположение (цифра, набранная курсивом,— номер рисунка),

1 — 5, 9, 10 17, 18, 34 35, 36, 39 60, 61, 62 136, 137, 138 231, 232, 233	2 — 234, 18.1, 18.2 18.3, 18.4, 18.5 7, 11, 14 19, 20, 21	3 — 37, 38, 39 52, 53, 63 64, 65, 66 67, 68, 69 70, 71, 72	4 — 123, 124, 125 139, 140, 141 142, 143, 187 188, 189, 190 191, 192, 193
5 — 235, 236, 237 238, 239, 240 241, 242, 243 244, 245, 246 247	6 — 12, 22, 23, 40 41, 42, 43 73, 74, 75 76, 77, 78 79, 80, 81 82, 83, 84	7 — 144, 145, 146 147, 148, 149 15, 24, 30 31, 45, 44 46, 54, 55	8 — 85, 86, 87 88, 89, 90 91, 92, 93 94, 95, 96 97, 126, 127
9 — 128, 129, 150 151, 152, 153 154, 155, 156 157, 194, 195 196, 197, 198	10 — 199, 200, 201 202, 203, 204 205 25, 47, 48 98, 99, 100	11 — 101, 102, 103 104, 105, 106 107, 108, 158 159, 160, 161 162, 163, 164	12 — 165, 166, 32 49, 113, 114 115, 50, 117 118, 119, 177
	13 — 57, 120, 225 121, 183, 134 184, 227, 228 185, 229		

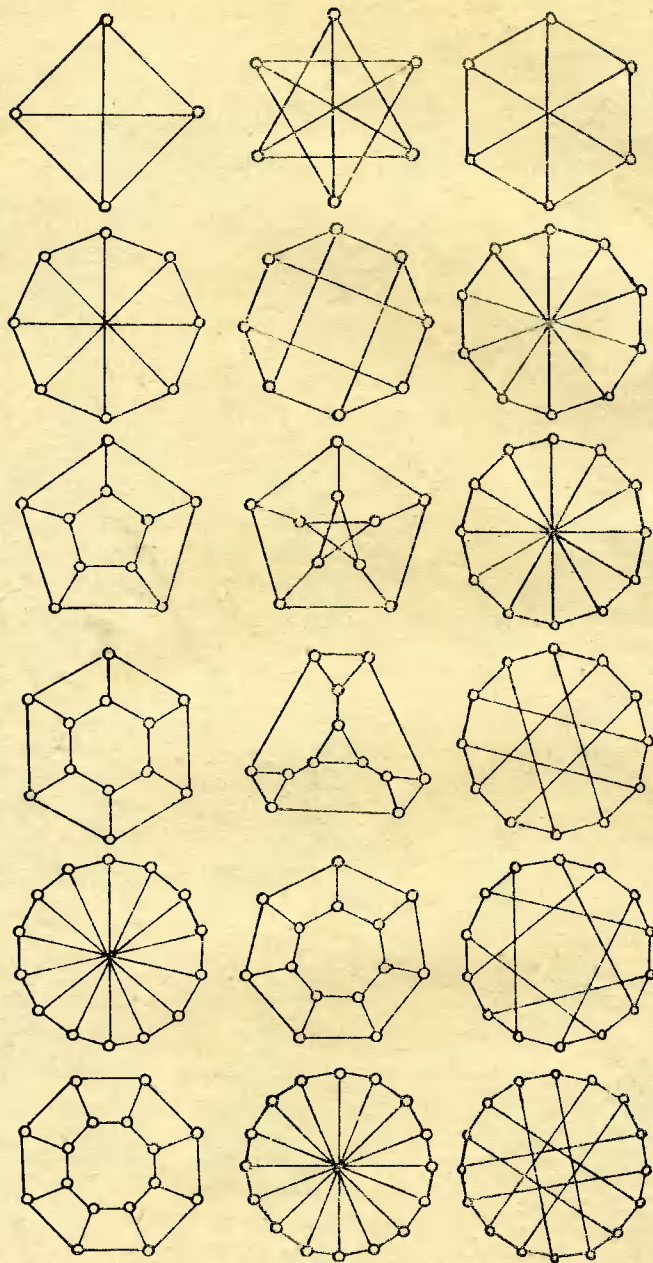


Рис. 1.

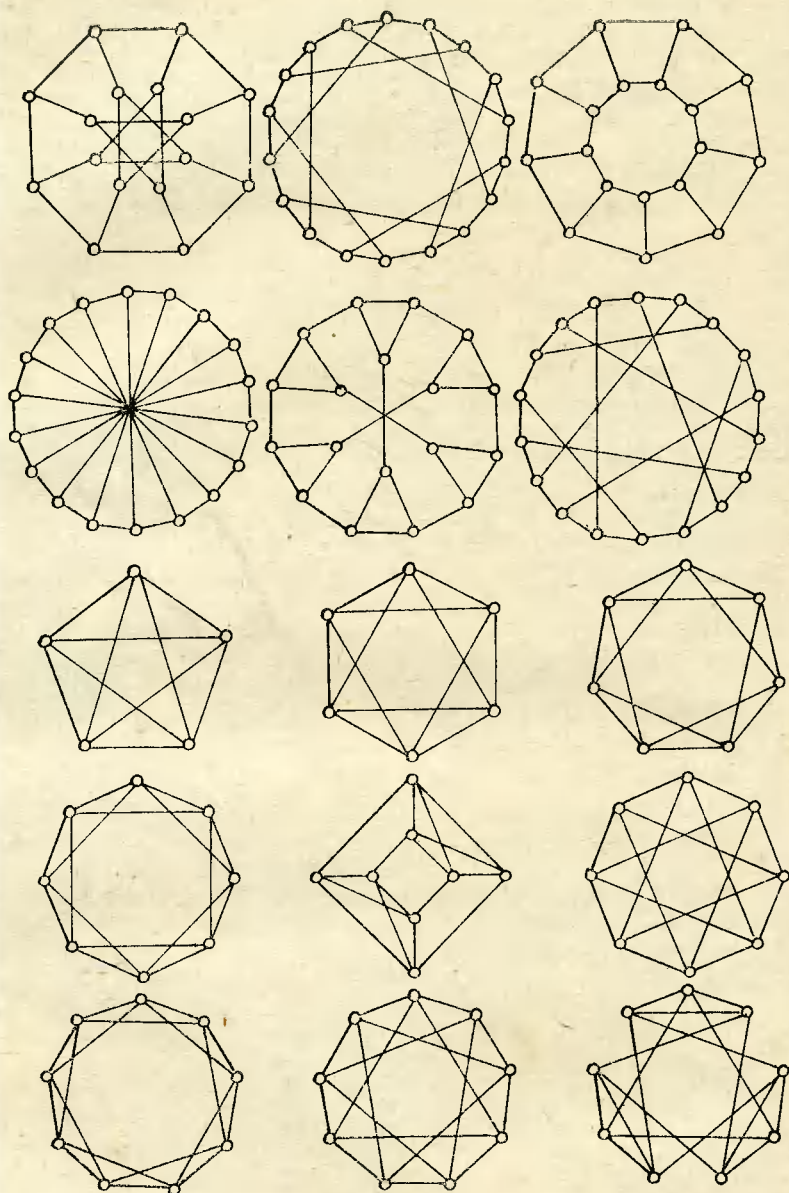


Рис. 2.

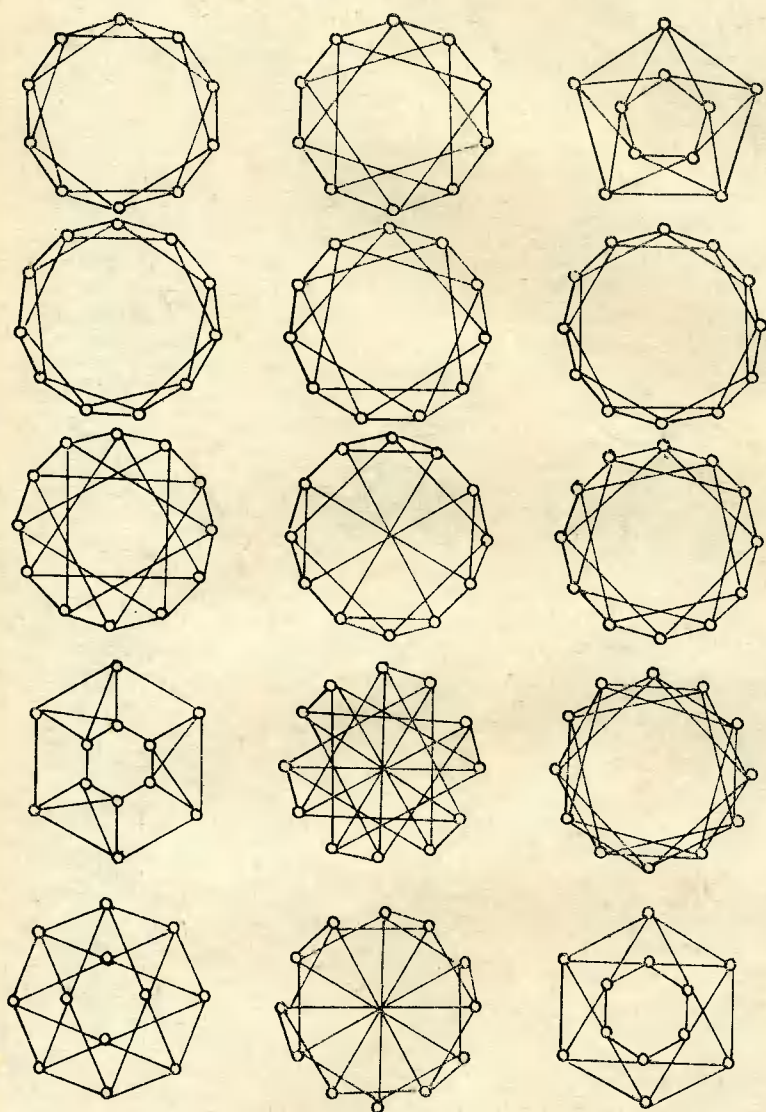


Рис. 3.

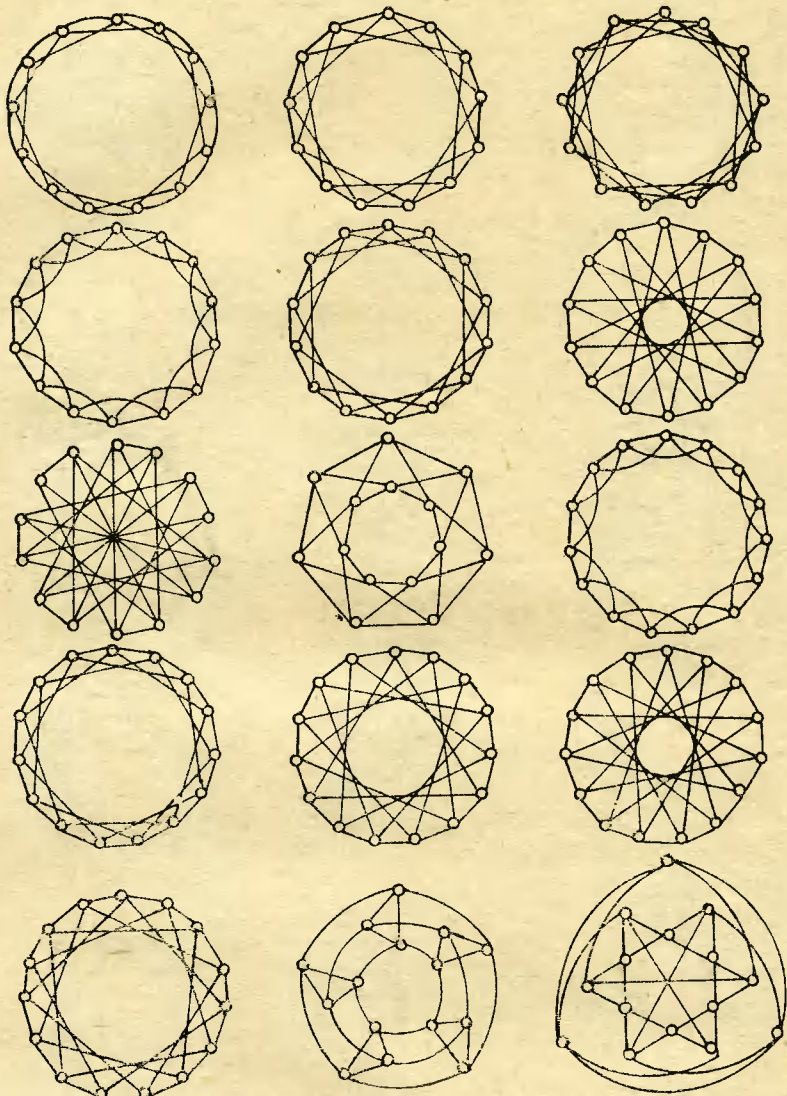


Рис. 4.

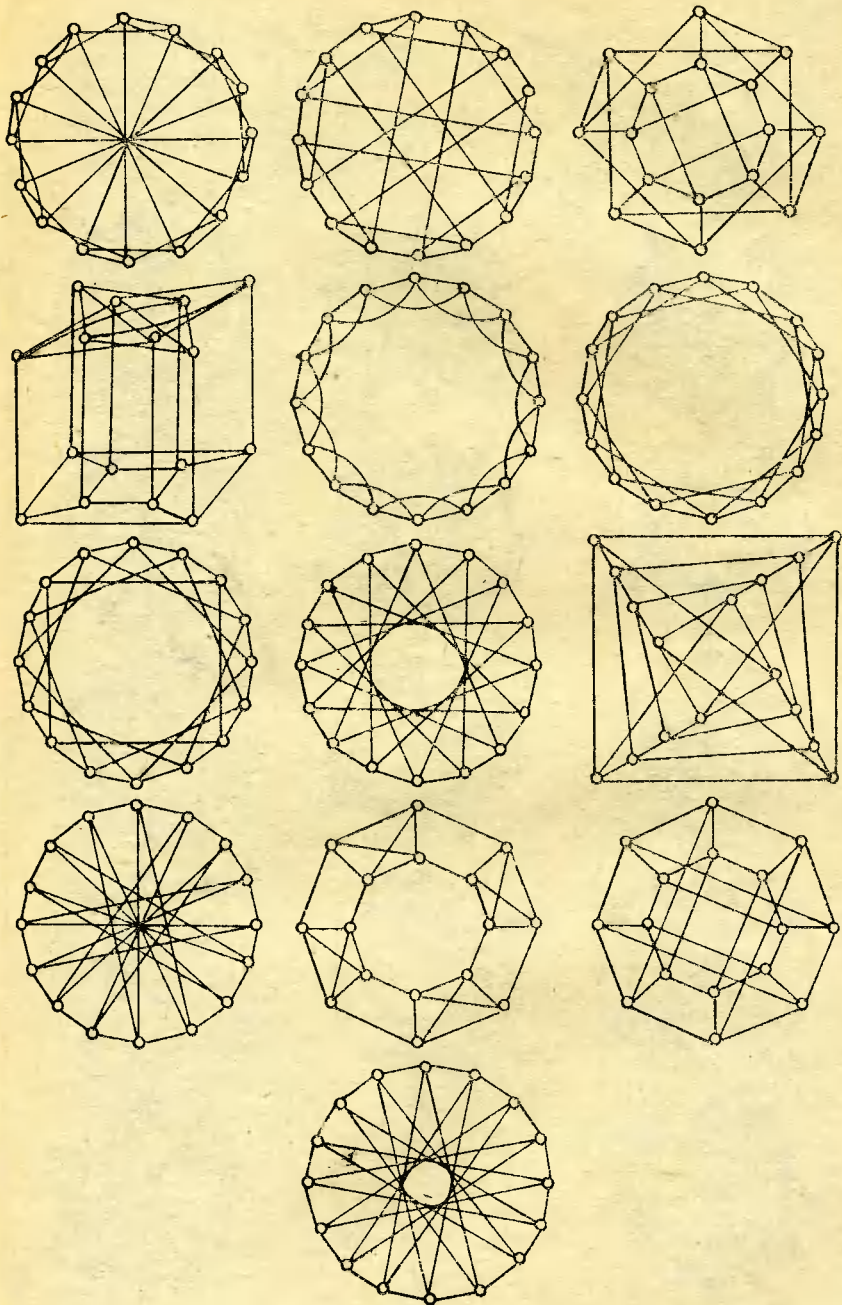


Рис. 5.

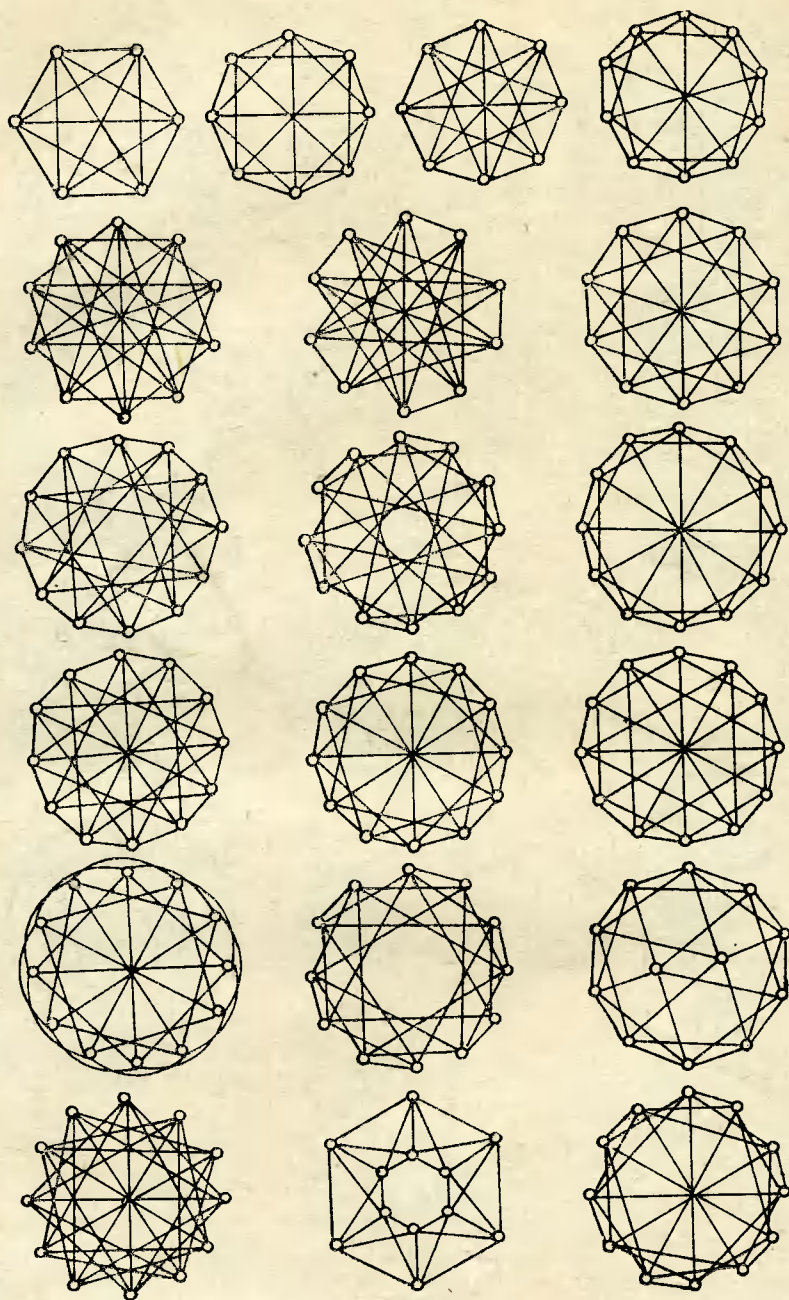


Рис. 6.

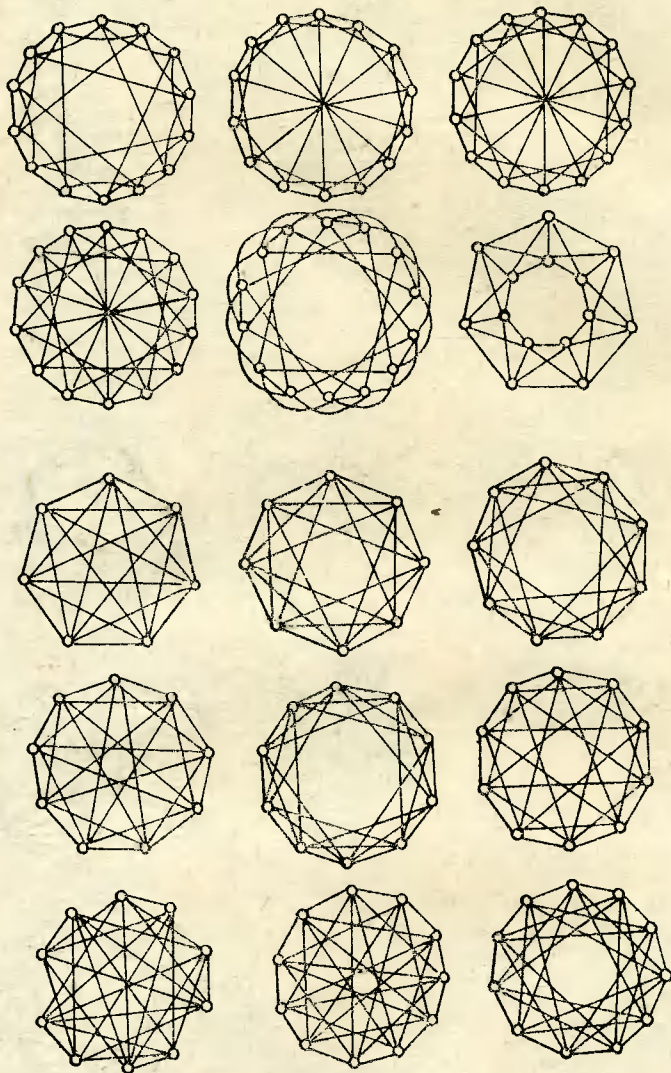


Рис. 7.

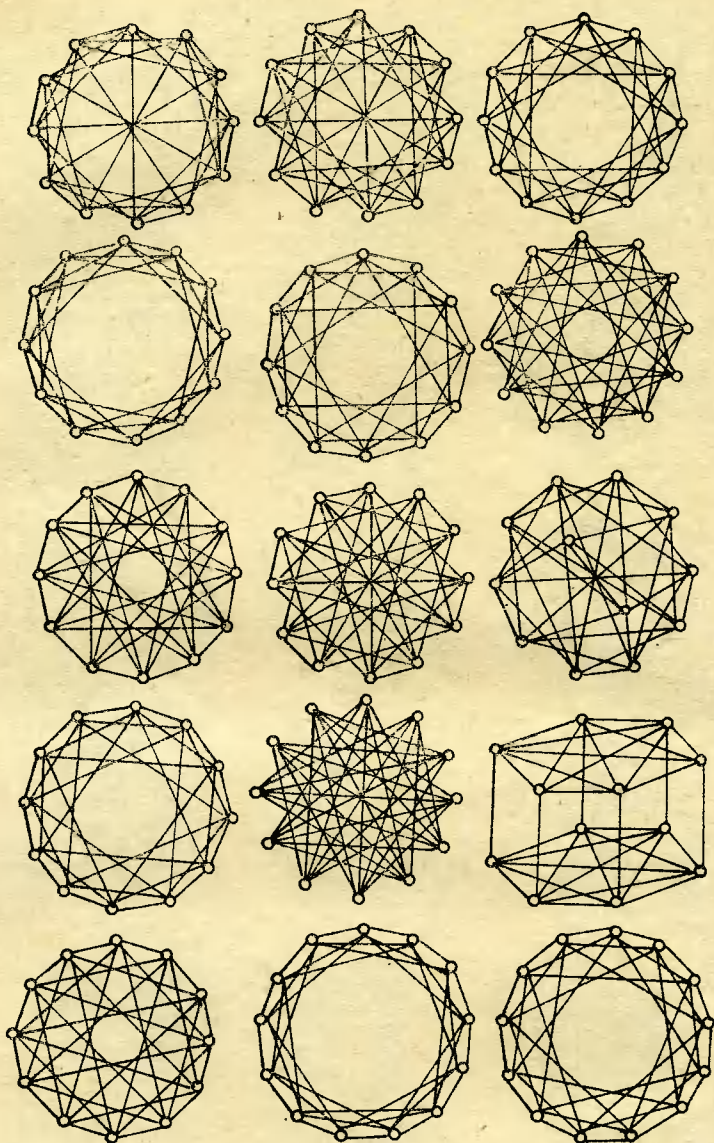


Рис. 8.

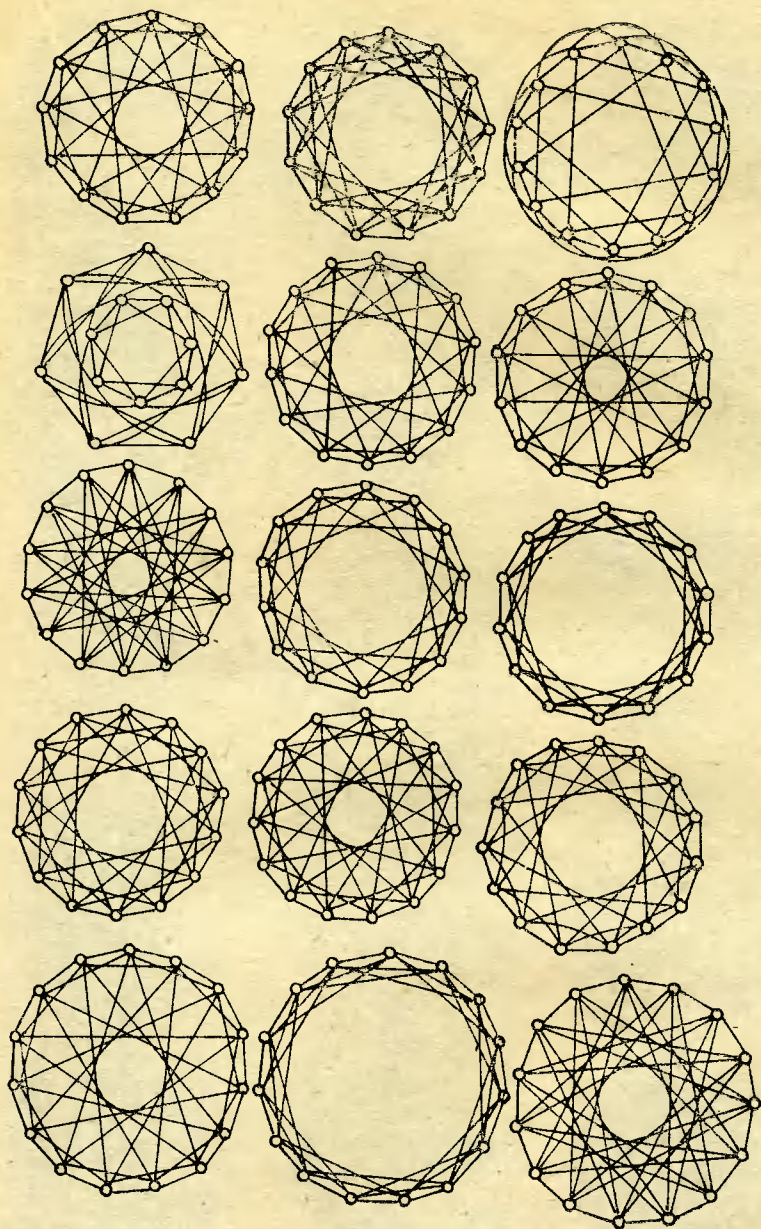


Рис. 9.

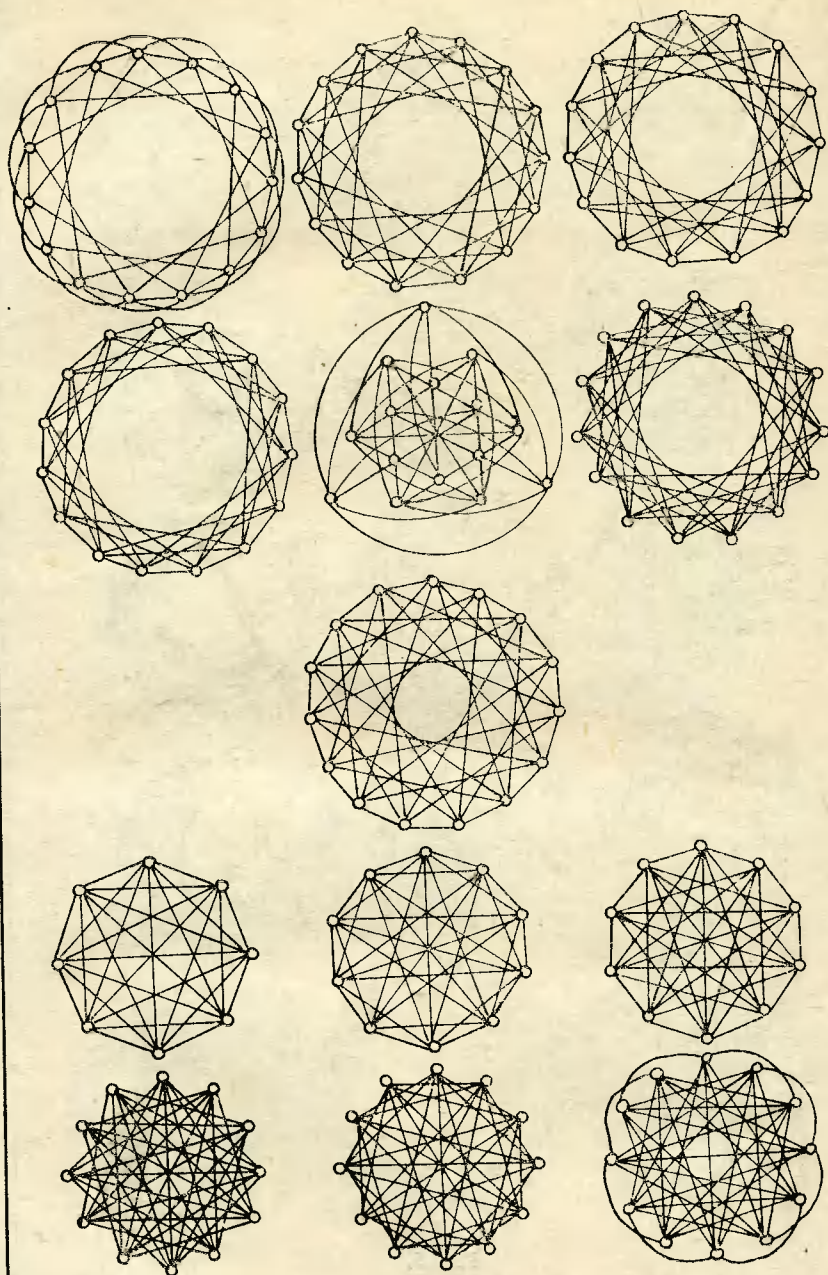


Рис. 10.

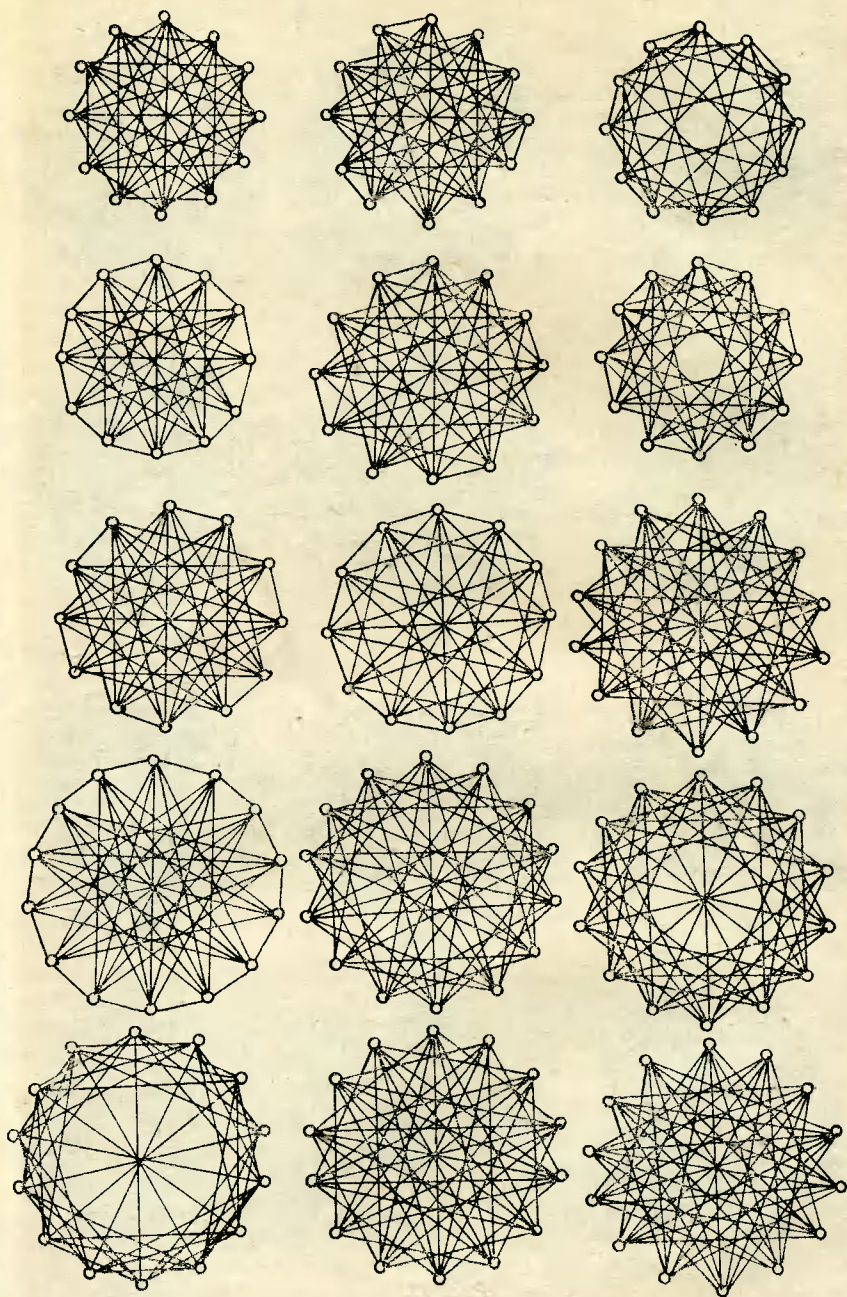


Рис. 11.

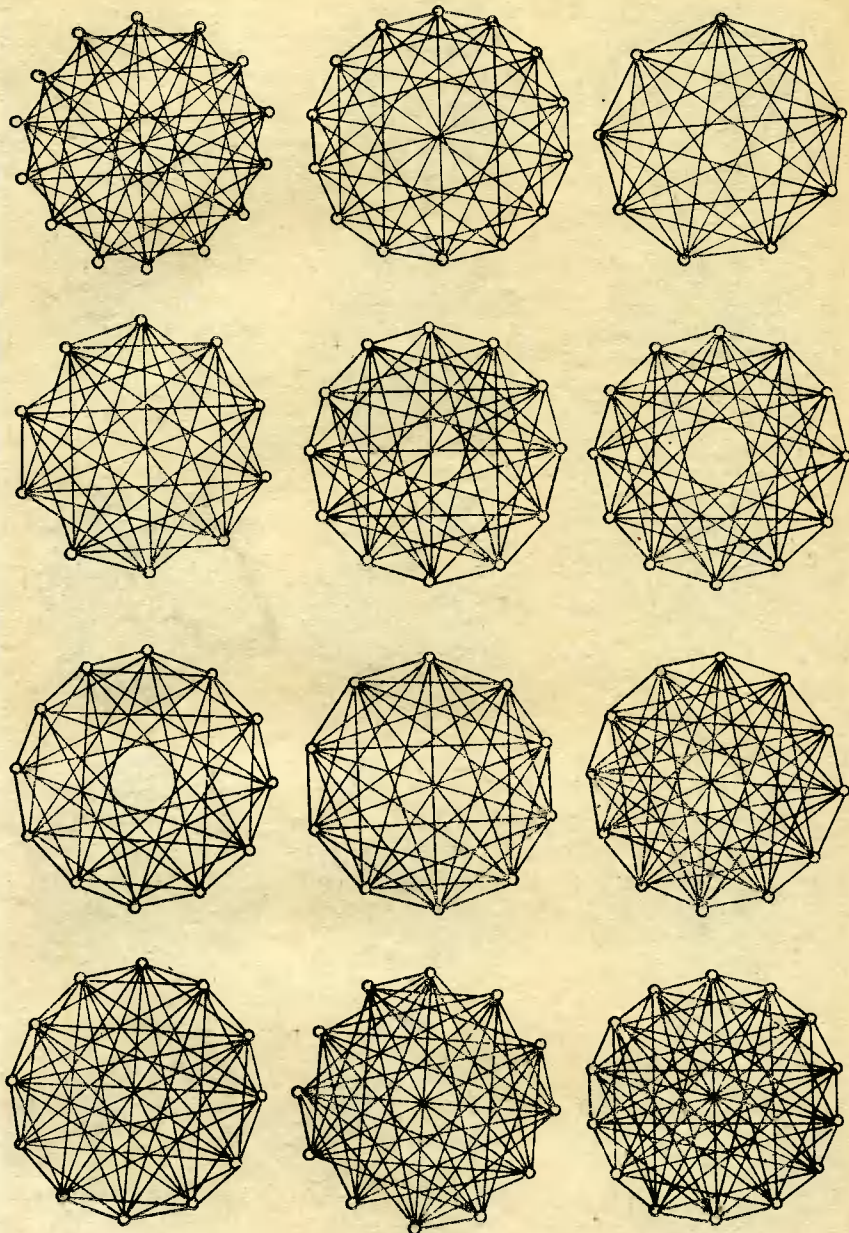


Рис. 12.

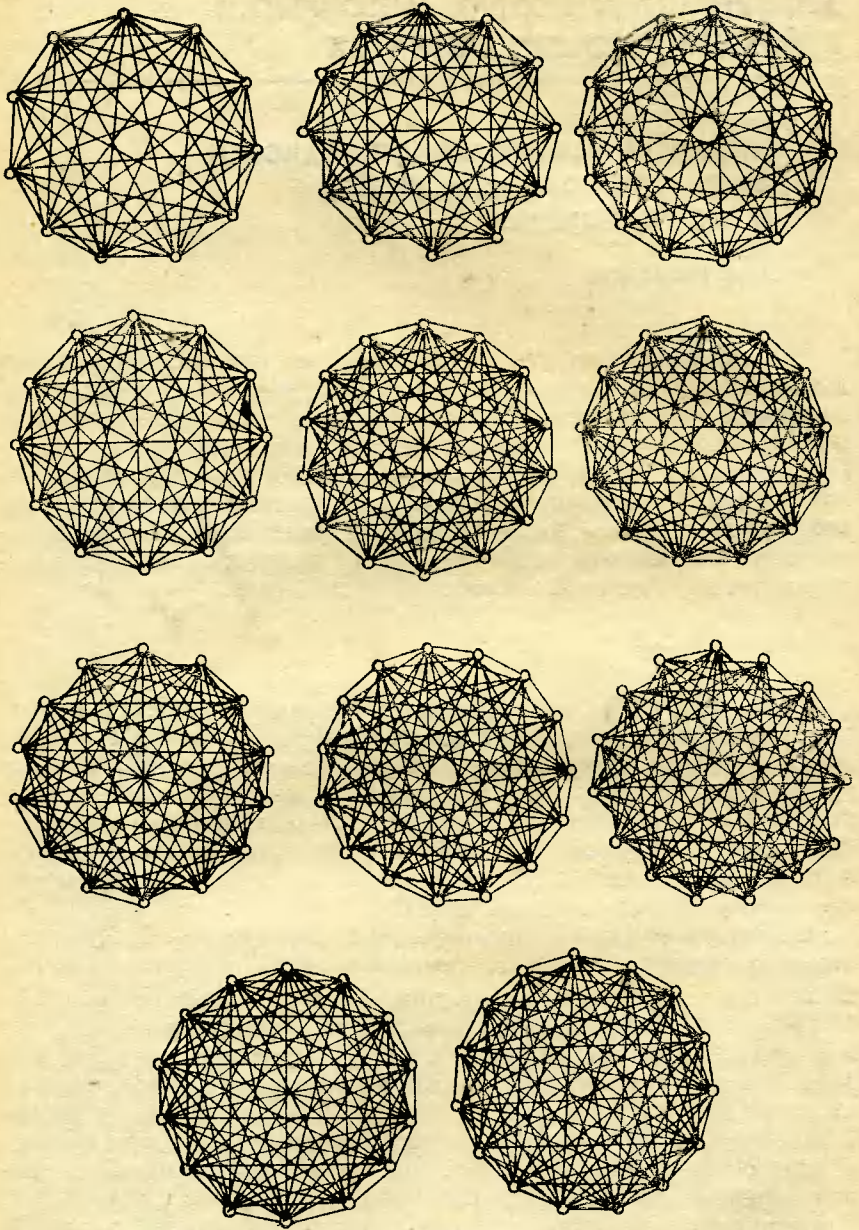


Рис. 13.

АЛГОРИТМЫ УПАКОВКИ И ПОКРЫТИЯ В КОМБИНАТОРНЫХ ОБЪЕКТАХ

АЛГОРИТМ МАКСИМАЛЬНОЙ УПАКОВКИ НЕЧЕТНОПОЛЮСНЫХ РАЗРЕЗОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

А. В. КАРЗАНОВ

Излагается алгоритм нахождения максимальной упаковки нечетнополюсных разрезов неориентированной сети, а также нахождения оптимального двойственного объекта — T -соединения минимального веса. Оценка числа действий алгоритма — $O(pt \log n + p^3 \log p)$, где n , t и p — число вершин, ребер и полюсов сети. Известными приложениями являются задачи: «о китайском почтальоне», о нахождении отрицательного цикла взвешенного неориентированного графа, о допустимом многопродуктовом потоке в плоской неориентированной сети.

1. ВВЕДЕНИЕ

Под *графом* будем понимать конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множества вершин и ребер графа H будут обозначаться соответственно VH и EH . *Циклом* графа будем считать непустой связный подграф, все вершины которого имеют степень 2. *Цепь*, или *st-цепь* графа, — это непустой связный подграф без циклов, в котором только вершины s и t (*концы* цепи) имеют степень меньше 2 (допускается $s = t$ — случай вырожденной цепи).

Исходным объектом рассмотрения будет сеть (G, T, l) , состоящая из связного графа G , подмножества его вершин $T \subseteq VG$, называемых *полюсами*, и функции $l \in \mathbf{R}_+^{EG}$ *длин* ребер графа G (\mathbf{R}_+ — множество неотрицательных вещественных чисел). Далее всегда будет предполагаться, что $|T|$ четно. Подграф J в G называется *T -соединением*, если множество вершин нечетной степени графа J совпадает с T (это близко к понятию T -join, введенному в [4]). Ясно, что всякое T -соединение представимо в виде объединения непересекающихся по ребрам цепей и циклов, причем концы цепей различны и образуют множество T . T -соединения возникают в связи с известной задачей «о китайском почтальоне» [2, 3] (см. также [4]), состоящей в нахождении в G замкнутого маршрута минимальной длины, проходящего через каждое ребро по крайней мере один раз. Легко показыва-

ется, что длина такого маршрута равна $l(EG) + l(EJ)$, где J есть T' -соединение минимальной длины для множества T'' вершин в G , имеющих нечетную степень (здесь и далее для произвольного множества S , числовой функции q на S и подмножества $S' \subseteq S$ через $q(S')$ обозначается величина $\sum(q(e) : e \in S')$).

Как оказывается, T -соединения связаны минимаксным соотношением с упаковками специальных разрезов сети. Пусть $\partial X = \partial^G X$, где $X \subseteq VG$ обозначает множество ребер в G с одним концом в X и другим в $VG - X$ (разрез графа G). Подмножество X , а также разрез ∂X называются *нечетнополюсными*, если $|X \cap T|$ нечетно; при $T = VG$ такие подмножество и разрез называются *нечетными*. Пусть $D = D(G, T)$ обозначает совокупность всех нечетнополюсных подмножеств для G и T . Для произвольной совокупности $D' \subseteq 2^{VG'}$ подмножеств вершин графа G' и функции $l' \in \mathbb{R}_+^{EG'}$ функция $f' : D' \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *l' -упаковкой*, или просто *упаковкой*, если для соответствующего семейства разрезов выполняется условие

$$\lambda^{f'}(e) \stackrel{\text{def}}{=} \sum (f'(X) : X \in D', e \in \partial^{G'} X) \leq l'(e) \quad \forall e \in EG'.$$

Упаковка f' называется *максимальной* (при данном D'), если величина $l \cdot f' = \sum (f'(X) : X \in D')$ максимально возможная.

Нетрудно проверить справедливость следующего свойства: подграф J в G является T -соединением тогда и только тогда, когда $|EJ \cap \partial X|$ нечетно для всех $X \in D(G, T)$. Отсюда для l -упаковки $f : D(G, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ и T -соединения J имеем

$$\begin{aligned} 1 \cdot f &\leq \sum_{X \in D} f(X) |\partial X \cap EJ| = \sum_{e \in EJ} \sum (f(X) : X \in D, e \in \partial X) = \\ &= \sum_{e \in EJ} \lambda^f(e) \leq l(EJ). \end{aligned}$$

Эдмондс и Джонсон доказали основную теорему о T -соединениях и упаковках нечетнополюсных разрезов.

Теорема 1 [5]. $\max 1 \cdot f = \min l(EJ)$, где максимум берется по всем l -упаковкам $f : D \rightarrow \mathbb{R}_+$, а минимум — по всем T -соединениям J в G .

Доказательство этой теоремы следует из приведенного в [5] алгоритма нахождения оптимальных f и J . Анализ этого алгоритма показывает, что он может быть реализован с оценкой числа действий $O(n^4)$ при памяти $O(n^2)$, где $n = |VG|$. Кроме того, в случае целочисленной функции l алгоритм строит полуцелочисленную оптимальную упаковку (независимое доказательство существования полуцелочисленной оптимальной упаковки дано в [6]). Этот результат был усилен Сеймуром следующим образом. Функцию $l \in \mathbb{Z}_+^{EG}$ (\mathbb{Z}_+ — множество неотрицательных целых чисел) назовем *циклически четной*, если любой цикл C в G имеет четную длину $l(EC)$.

Теорема 2 [7]. Если функция l циклически четная, то равенство в теореме 1 достигается для целочисленной упаковки $f: D \rightarrow \mathbb{Z}_+$.

Следует отметить, что доказательство в работе [7] неалгоритмическое; в то же время в случае циклически четной функции l алгоритм в [5] гарантирует построение лишь полуцелочисленного, но не целочисленного оптимального f .

Задачу нахождения оптимальных f и J будем обозначать $\mathcal{P}(G, T, l)$. В настоящей работе излагаются алгоритм решения этой задачи (при произвольных $l \in \mathbb{R}_+^{EG}$), имеющий трудоемкость $O(pnm + p^4)$ действий, и его модификация трудоемкости $O(pm \log n + p^3 \log p)$ при памяти $O(m + pn)$, где $m = |EG|$ и $p = |T|$. Если при этом функция l оказывается циклически четной, алгоритм, как и его модификация, строит целочисленное оптимальное f (таким образом, будет получено алгоритмическое доказательство теоремы 2). Конструкция предлагаемого алгоритма выглядит более простой, чем в работе [5]. Здесь используется идея редукции, высказанная в [8, п. 5] для более широкого класса мультиразрезных задач. В данном случае задача $\mathcal{P}(G, T, l)$ редуцируется к $\mathcal{P}(K_T, T, h)$, где K_T — полный граф с множеством вершин T и $h(st)$, $s, t \in T$, — расстояние между полюсами s и t в графе G с длинами ребер l . В свою очередь $\mathcal{P}(K_T, T, h)$ фактически представляет собой вариант задачи о паросочетаниях и решается при помощи техники чередующихся цепей. Алгоритм описан в разд. 2 и 3. В разд. 4 изложена экономная модификация алгоритма, основанная на использовании логарифмической справочной изменяющегося упорядоченного множества.

В заключение укажем два известных приложения задачи $\mathcal{P}(G, T, l)$.

А. Пусть $U \subseteq EG$ — выделенное подмножество ребер в G , а Q — совокупность всех подмножеств $X \subset VG$ таких, что $|\partial X \cap U| = 1$. Сеймур рассмотрел задачу о существовании l -упаковки $f': Q \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей $\lambda''(e) = l(e)$ для всех $e \in U$ (задача $\mathcal{A}(G, U, l)$).

Теорема 3 [9]. Задача $\mathcal{A}(G, U, l)$ имеет решение тогда и только тогда, когда для любого цикла C в G справедливо

$$l(EC \cap U) \leq l(EC - U), \quad (A)$$

иными словами, когда в графе G с функцией длин ребер w , определенной как $w(e) = l(e)$ ($e \in EG - U$) и $w(e) = -l(e)$ ($e \in U$), отсутствуют циклы C отрицательной длины $w(EC)$.

В [7] показано, что она сводится к задаче $\mathcal{P}(G, T, l)$, где T определяется как множество вершин, инцидентных нечетному числу ребер в U . А именно: пусть f и J — оптимальные решения последней задачи. Поскольку U порождает T -соединение для данного T , то $l(EJ) \leq l(U)$. Если окажется, что $l(EJ) < l(U)$, то задача $\mathcal{A}(G, U, l)$ не имеет решения (нетрудно видеть, что в подграфе, порожденном множеством ребер $(EJ - U) \cup (U - EJ)$,

содержится цикл C , для которого нарушено неравенство (А)). Если же $l(EJ) = l(U)$, то f определяет решение задачи $\mathcal{A}(G, U, l)$ (из $1 \cdot f = l(U)$ следует: если $X \in D(G, T)$, $f(X) > 0$, то $|\partial X \cap U| = 1$, и что $\lambda'(e) = l(e)$ для всех $e \in U$). Отметим также, что из теоремы 2 вытекает: если функция l циклически четная и задача $\mathcal{A}(G, U, l)$ имеет решение, то она имеет и целочисленное решение (в [10, п. 8] показано, что этот результат можно непосредственно получить из теоремы 3).

Таким образом, алгоритм настоящей работы позволяет решить задачу $\mathcal{A}(G, U, l)$ и, в частности, может быть использован для обнаружения отрицательного цикла в неориентированном взвешенном графе. В этом случае его модификация имеет трудоемкость $O(\min \{pm \log n, pn^2\} + p^3 \log p)$, где p — число вершин, инцидентных нечетному числу ребер отрицательной длины (понижение оценки объясняется тем, что не требуется строить l -упаковку f).

Б. Рассмотрим задачу о допустимом многопродуктовом потоке для плоского графа G , в котором выделено подмножество ребер $U \subseteq EG$, и на ребрах $e \in EG - U$ заданы пропускные способности $c(e) \geq 0$, а на ребрах $u \in U$ — потоковые требования $d(u) \geq 0$. Требуется построить в графе $(VG, EG - U)$ многопродуктовый поток $\{F_u : u \in U\}$ (F_u — поток, полюсами которого являются концы ребра u) так, чтобы величина каждого F_u была равна $d(u)$ и сумма потоков по каждому ребру $e \in EG - U$ не превышала $c(e)$. Пусть G^* и U^* — объекты, двойственные G и U относительно планарности; положим $l(e^*) = c(e)$ ($e \in EG - U$) и $l(e^*) = d(e)$ ($e \in U$), где e^* обозначает ребро, двойственное e . Нетрудно понять, что наша задача равносильна $\mathcal{A}(G^*, U^*, l)$, поэтому из теорем 3 и 2 вытекает

Теорема 4 [7]. Для указанных G, U, c, d допустимый многопродуктовый поток существует тогда и только тогда, когда для любого $X \subset VG$ выполняется неравенство Форда — Фалкерсона

$$c(\partial X - U) - d(\partial X \cap U) \geq 0. \quad (Б)$$

Если функции c и d целочисленные и для любого $X \subset VG$ величина в левой части (Б) неотрицательная и четная, то существует целочисленный допустимый многопродуктовый поток.

2. РЕДУКЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ

Пусть xu обозначает неупорядоченную пару вершин x и y в G . Если $x, y \in T$, $x \neq y$, пару xu будем отождествлять с ребром полного графа K_T , соединяющим x и y . Множество ребер в K_T будем обозначать E_T .

Пусть $\mu_i(xu)$ — расстояние между вершинами x и y графа G , т. е. минимум величин $l(EL)$ по всем xu -цепям в G (напомним,

что граф G предполагается связным, следовательно, $\mu_1(xy)$ конечно). Очевидно, функция μ_1 удовлетворяет неравенствам треугольника, т. е. является метрикой. Предлагаемый алгоритм состоит из трех стадий.

Первая стадия — вычисление расстояний $\mu_1(st)$ для всех $s, t \in T$. Ее трудоемкость — $O(pn^2)$, если считать, что для нахождения расстояний от каждого фиксированного полюса s до остальных используется алгоритм трудоемкости $O(n^2)$, например алгоритм Дейкстры. Если же для их вычисления применяется $O(m \log n)$ -алгоритм из [11], то трудоемкость первой стадии будет $O(pm \log n)$.

Пусть h обозначает ограничение функции μ_1 на множество E_T . Легко доказать следующее утверждение.

(2.1) Если функция l циклически четная, то функция h тоже циклически четная (в графе K_T).

На второй стадии алгоритма, которая изложена в разделе 3, найдено решение редуцированной задачи $\mathcal{P}(K_T, T, h)$. А именно: построены h -упаковка нечетных разрезов $g: D(K_T, T) \rightarrow \mathbf{R}_+$ и совершенное паросочетание M графа K_T , для которых $1 \cdot g = h(M)$. (Напомним, что паросочетание — это подмножество ребер графа, все концы которых различны; паросочетание называется совершенным, если оно покрывает все вершины графа; ясно, что подграф, порожденный совершенным паросочетанием в K_T , является T -соединением.) Кроме того, если функция h циклически четная, то построенная упаковка g будет целочисленной. Положим $Q = \{A \in D(K_T, T) : g(A) > 0\}$. Функция g будет обладать также следующим важным свойством (P): для любых различных $A, B \in Q$ выполняется либо $A \subset B$, либо $B \subset A$, либо $A \cap B = \emptyset$.

Третья стадия алгоритма (процедура восстановления) заключается в преобразовании g и M в l -упаковку $f: D(G, T) \rightarrow \mathbf{R}_+$ и T -соединение J в G , для которых будет выполнено

$$1 \cdot f = 1 \cdot g, \quad l(EJ) = h(M),$$

откуда следует $1 \cdot f = l(EJ)$, т. е. $\{f, J\}$ — решение задачи $\mathcal{P}(G, T, l)$.

Требуемое T -соединение J строится очевидным образом. Для каждого $st \in M$ надо взять st -цепь L^{st} в G , для которой $l(EL^{st}) = h(st)$ (можно взять кратчайшие цепи, найденные на первой стадии алгоритма). Выделим множество ребер в G , принадлежащих нечетному числу цепей L^{st} , $st \in M$, и пусть J — подграф, порождаемый этими ребрами. Легко видеть, что J является T -соединением и $l(EJ) \leq h(M)$ (в действительности это неравенство выполняется как равенство).

Задача построения требуемой упаковки f не столь проста. Она решается следующим алгоритмом (для него не существенно, что множество Q состоит из нечетных подмножеств в T , важно лишь, что Q удовлетворяет свойству (P)).

Алгоритм. Выберем в Q минимальное по включению множество A . Положим

$$X = \{x \in VG : \min \{\mu_i(sx) : s \in A\} = 0\};$$

$$a = \min \{g(A), \min \{l(e) : e \in \partial X\}\}.$$

Положим $f(X) = a$ и пересчитаем g и l как $g(A) := g(A) - a$ и $l(e) := l(e) - a (e \in \partial X)$ (на остальных элементах функции g и l остаются прежними). Если стало $g(A) = 0$, то удаляем A из множества Q . Если все еще $g(A) > 0$, то на следующем шаге берется то же самое множество A . Повторяем такие шаги до тех пор, пока текущее Q не станет пустым.

Пусть f — получившаяся функция (считающаяся продолженной нулем на элементах $X \in D(G, T)$, не появлявшихся на шагах алгоритма). Докажем, что f является искомой упаковкой нечетнополосных подмножеств. Доказательство разбивается на ряд утверждений.

(2.2) *Справедливо $X \cap T = A$.*

Доказательство. Если $x \in A$, то ввиду $\mu_i(xx) = 0$ имеем $x \in X$. Если $x \in T - A$, то для любого $s \in A$

$$\mu_i(sx) = h(sx) \geq \lambda^s(sx) = \Sigma(g(B) : B \in Q, sx \in \partial B) \geq g(A) > 0,$$

следовательно, $x \notin X$.

Из утверждения (2.2) следует, в частности, что каждое определяемое в алгоритме множество X принадлежит $D(G, T)$.

(2.3) *Если l' и g' — функции, получающиеся из l и g в результате одного шага, то $\lambda^{g'}(pq) \leq \mu_{l'}(pq)$ для всех $pq \in E_T$ (т. е. функция g' является h' -упаковкой, где h' — ограничение $\mu_{l'}$ на E_T).*

Доказательство. Положим $\lambda = \lambda^{g'}$. Надо доказать, что для произвольных ребра $pq \in E_T$ и pq -цепи L в G справедливо $l'(EL) \geq \lambda(pq)$. Проведем индукцию по параметру $k(L) = |EL \cap \partial X|$ (при всех pq и L).

А. Если $k(L) = 0$, то $l'(EL) = l(EL) \geq \mu_l(pq) \geq \lambda^s(pq) = \lambda(pq)$.

Б. Если $k(L) = 1$, то, очевидно, строго один из полюсов p и q принадлежит A . Следовательно, $l'(EL) = l(EL) - a$ и $\lambda(pq) = \lambda^s(pq) - a$, откуда получаем требуемое неравенство.

В. Если $p, q \in A$, то ввиду минимальности A и свойства (P) имеем $\lambda(pq) = \lambda^s(pq) = 0$, и неравенство очевидно.

Г. Пусть имеет место случай, отличный от рассмотренных в А — В. Тогда найдется вершина $x \in VL$ такая, что $x \in X$, $k(L') \geq 1$ и $k(L'') \geq 1$, где L' и L'' — отрезки цепи L от p до x и от x до q соответственно. По определению множества X существует полюс $s \in A$ такой, что $\mu_l(sx) = 0$. Выберем sx -цепь P , для которой $l(EP) = 0$; очевидно, $VP \subseteq X$. Выделим ps -цепь L_1 в графе $L' \cup P$ и sq -цепь L_2 в графе $L'' \cup P$. Из сказанного следует $k(L_i) < k(L)$, $i = 1, 2$, откуда по предположению индукции имеем $l'(EL_1) \geq \lambda(ps)$ и $l'(EL_2) \geq \lambda(sq)$. Наконец, $l'(EL) \geq l'(EL_1) +$

$+l'(EL_2)$ и $\lambda(pq) \leq \lambda(ps) + \lambda(sq)$, поскольку если $B \subset T$ и $pq \in \partial B$, то $\{ps, sq\} \cap \partial B \neq \emptyset$.

(2.4) Пусть в результате шага осталось $g(A) > 0$, и пусть X' — множество, найденное на следующем шаге. Тогда $X \subset X'$.

Доказательство следует из того, что по определению числа g для некоторого ребра $e \in \partial X$ в результате шага будет $l(e) = 0$.

Утверждения (2.2) — (2.4) обосновывают корректность алгоритма. Причем (2.4) показывает, что алгоритм конечен и оканчивается через не более чем $n|Q|$ шагов, а все найденные множества X различны. Утверждение (2.3) обосновывает корректность шага, и из него следует: для каждого $A \in Q$ сумма значений $f(X)$ по всем $X \in D(G, T)$ таким, что $X \cap T = A$, равна $g(A)$. Таким образом, $1 \cdot f = 1 \cdot g$.

Оценим трудоемкость алгоритма. Следующее утверждение легко доказывается индукцией по $|T|$ (см., например, [13]).

(2.5) Если $Q' \subseteq 2^T$ — множество, в котором для любых различных $A, B \in Q'$ выполняется одно из соотношений $A \subset B$, $B \subset A$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = T$, то $|Q'| \leq 4|T| - 6$.

Следовательно, алгоритм состоит из $O(pn)$ шагов. Нетрудно видеть, что каждый шаг может быть выполнен за $O(m)$ действий. Таким образом, трудоемкость третьей стадии — $O(pnm)$. Требуемая память — $O(pn)$, если считать, что множества X , найденные при работе с одним и тем же $A \in Q$, выдаются в виде отрезков единого (для фиксированного A) массива вершин.

3. АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕДУЦИРОВАННОЙ СЕТИ

В дальнейшем граф K_T и множество его ребер E_T будем для удобства обозначать K и E . Текущими объектами алгоритма решения задачи $\mathcal{P}(K, T, h)$ (т. е. второй стадии всего алгоритма решения исходной задачи) будут паросочетание $M \in E$ (не обязательно совершенное), подсемейство нечетных подмножеств $D \subset D(K, T)$ и h -упаковка $g \in \mathbb{R}_+^D$. Ребро $e \in E$ назовем насыщенным, если $\lambda^s(e) = h(e)$. Пусть M_A обозначает множество ребер в M , имеющих оба конца в подмножестве $A \in T$. Для M, D, g всегда будут выполняться следующие свойства:

(P1) каждое ребро паросочетания M насыщенное;

(P2) D — правильное семейство. Это означает:

(а) для любых различных $A, B \in D$ либо $A \subset B$, либо $B \subset A$, либо $A \cap B = \emptyset$;

(б) $|M_A| = (|A| - 1)/2$ для любого $A \in D$.

Вершину $s \in T$ назовем *покрытой* паросочетанием M' , если s инцидентно некоторому ребру в M' . Пусть r_A обозначает единственную вершину в $A \in D$, не покрытую паросочетанием M_A . Следующее утверждение достаточно очевидно.

(3.1): (а) $|M \cap \partial A| \leq 1$ для любого $A \in D$ и равенство выполняется тогда и только тогда, когда r_A покрыто M ;

(б) если паросочетание M совершенное, то $1 \cdot g = h(M)$.

Алгоритм будет состоять из $|T|/2$ этапов. В начале алгоритма полагается $M = \emptyset$ и $D = \emptyset$. В начале очередного этапа произвольно выбирается вершина $r \in T$, не покрытая паросочетанием M , и на этапе M , D и g преобразуются таким образом, что к множеству покрытых вершин добавится r и еще одна вершина. Как только паросочетание M станет совершенным, текущая упаковка g (считающаяся продолженной нулем на $D(K, T) - D$) и данное M (точнее, порожденное им T -соединение в K) будут решением задачи $\mathcal{P}(K, T, h)$ ввиду (3.1), (б). Отметим, что в силу (P2), (а) для g будет выполнено указанное в предыдущем разделе свойство (P).

Вначале опишем дополнительные структуры, с которыми оперирует алгоритм. Обозначим через $V = V^D$ множество, элементами которого служат вершины в T и множества в D . Зададим на V частичный порядок, полагая $v \prec v'$, если либо $v \in T$, $v' \in D$ и $v \in v'$, либо $v, v' \in D$ и $v \subset v'$ (в частности, $s \prec \{s\}$, если $s \in T$ и $\{s\} \in D$). Заметим, что в силу свойства (P2), (а) любые два несравнимых элемента в V не содержат общих вершин. Элемент v назовем *подчиненным* элементу v' , если $v \prec v'$, и *непосредственно подчиненным*, если нет такого v'' , что $v \prec v'' \prec v'$. Множество максимальных элементов в V обозначим W , а множество максимальных элементов, непосредственно подчиненных элементу $A \in D$, — W_A . Для $s \in T$ через $w(s)$ (соответственно через $w_A(s)$ при $s \in A \in D$) будем обозначать единственный элемент $v \in W$ (соответственно $v \in W_A$), для которого $s \prec v$ или $s = v$. Определим мультиграф $F = F^D$, множеством вершин которого является W , а ребра взаимно однозначно соответствуют ребрам $st \in E$, для которых $w(s) \neq w(t)$. Аналогично определим мультиграф F_A , $A \in D$ с множеством вершин W_A , ребра которого суть $st \in E$ при $w_A(s), w_A(t) \in W_A$, $w_A(s) \neq w_A(t)$ (нам удобно считать — и это хорошо согласуется с программной реализацией алгоритма, — что ребрами мультиграфов F и F_A являются соответствующие ребра исходного множества E , т. е. можно одновременно писать $st \in E$, $st \in EF$ и $st \in EF_A$). Вершину v в F (F_A) назовем *простой*, если $v \in T$, и *сложной*, если $v \in D$.

Пусть M^D (M_A^D) обозначает множество ребер в M , принадлежащих мультиграфу F (F_A). Из нечетности всех $A \in D$ и из (3.1), (а) вытекает следующее утверждение.

(3.2): (а) $|W|$ четно, а $|W_A|$ нечетно для всех $A \in D$;

(б) M^D (M_A^D) является паросочетанием в F (соответственно в F_A).

Цепь в F (F_A) назовем *чередующейся*, если все ее ребра насыщенные и из любых двух ее смежных ребер одно принадлежит M . Подграф H в F назовем *чередующимся деревом*, с корнем $w(r)$, если $w(r) \in V_H$, граф H связан и не содержит циклов; для каждого $v \in V_H$ цепь $L(v)$ в H с концами v и $w(r)$ чередующаяся; для каждой вершины $v \in V_H$, имеющей в H степень единица,

цепь $L(v)$ содержит четное число ребер. Обозначим VH^+ (VH^-) множество вершин $v \in VH$, для которых $L(v)$ имеет четное (нечетное) число ребер, и положим $W^0 = W - VH$. Очевидно, $w(r) \in VH^+$, и степень (в H) любой вершины $v \in VH^-$ равна двум. В процессе алгоритма будет выполняться следующее дополнительное свойство:

(РЗ) для каждого $A \in D$ с $|A| > 1$ в F_A имеется (и явно выделен) цикл C_A , содержащий все вершины в F_A и такой, что все его ребра насыщенные и $(|EC_A| - 1)/2$ из них принадлежит M .

Очевидно, для каждого $v \in W_A$ в C_A содержится чередующаяся цепь с концами $w_A(r_A)$ и v , имеющая четное число ребер; обозначим ее через $L_A(v)$ (если $|A| = 1$, положим $L_A(v) = (\{r_A\}, \emptyset)$). В процессе алгоритма поддерживаются числа $\lambda^g(e)$, $e \in E$.

Этап алгоритма состоит из последовательности шагов. Шаг заключается в выполнении одной из процедур П0 — П5; на первом шаге выполняется процедура П0. Основная работа на этапе связана с «выращиванием» в F чередующегося дерева H с корнем $w(r)$. Вначале полагается $H = (\{w(r)\}, \emptyset)$.

Процедура П0. Находим некоторое ребро $st \in E$ такое, что $\lambda^g(st) = h(st)$ и либо (а): $w(s) \in VH^+$, $w(t) \in W^0$, либо (б): $w(s), w(t) \in VH^+$, $w(s) \neq w(t)$. В случае (а) переходим к процедуре П1, если $w(t)$ не покрыто паросочетанием M^D , и к процедуре П2, если покрыто. В случае (б) переходим к П3. Если в E нет указанных ребер, то находим в VH^- некоторую вершину $v = A \in D$, для которой $g(A) = 0$, и переходим к П4. Если такой вершины нет, — к П5.

Процедура П1 (увеличение паросочетания). Положим $r' = t$, если $w(t) = t$, и положим $r' = r_A$, если $w(t) = A \in D$ (согласно (3.4), (а) вершина r' не покрыта M). Выделяем в H чередующуюся цепь $L(w(s))$ и, добавляя к ней ребро st и вершину $w(t)$, получаем чередующуюся цепь L в F , соединяющую не покрытые паросочетанием M^D вершины $w(r)$ и $w(t) = w(r')$. Если L содержит некоторую сложную вершину $v = B$, то перестраиваем L в соответствующую чередующуюся цепь мультиграфа $F^{D'}$, где $D' = D - \{B\}$. Для этого заменяем «вершину» v подходящей чередующейся цепью $L_B(v')$ цикла C_B . Делая такие перестройки и далее, в конце получаем чередующуюся цепь \tilde{L} исходного графа K , соединяющую r и r' . Пусть $\tilde{M} = M \cap E\tilde{L}$. Преобразуем M вдоль \tilde{L} , полагая $M := (M - \tilde{M}) \cup (E\tilde{L} - \tilde{M})$.

Процедура П1 завершает рассматриваемый этап. В результате мощность паросочетания M увеличивается на единицу и вершины r и r' становятся покрытыми. Легко проверить, что для имеющихся D и g и нового M свойства (Р1) — (Р3) остаются справедливыми.

Процедура П2 (наращивание H). Выделяем в M^D ребро, инцидентное $w(t)$; пусть это ребро $t'z \in E$, где $w(t') = w(t)$ (из свойств дерева H следует $w(z) \in W^0$). Нарращиваем H , добавляя к нему вершины $w(t)$, $w(z)$ и ребра st , $t'z$. Возвращаемся к П0.

Процедура ПЗ (*редукция по нечетному циклу*). Добавляем к H ребро st и в получившемся графе выделяем цикл C (он составлен отрезками цепей $L(w(s))$ и $L(w(t))$ до первой общей вершины и ребром st и содержит $(|EC| - 1)/2$ ребер из M^D). Образует новое нечетное подмножество $A = \{s' \in T : w(s') \in VC\}$ и полагаем $D := D \cup \{A\}$, $g(A) = 0$ и $C_A = C$. Новое дерево H получается из старого отождествлением вершин множества VC . Возвращаемся к П0.

Процедура П4 (*разрушение сложной вершины*). Выделяем в H два смежных ребра st и $t'z$, где $t'z \in M^D$, $w(t) = w(t') = A$ (очевидно, $t' = r_A$). В C_A выделяем цепь $L_A(w_A(t))$. Полагаем $D := D - \{A\}$ и преобразуем H , заменяя в нем вершину A цепью $L_A(w_A(t))$. Возвращаемся к П0.

Легко проверить, что в результате каждой из процедур П2—П4 свойства (P1)—(P3) остаются справедливыми, и дерево H продолжает быть корректным. Пусть $E^{0+} = \{st \in E : w(s) \in VH^+, w(t) \in W^0\}$ и $E^{++} = \{st \in E : w(s), w(t) \in VH^+, w(s) \neq w(t)\}$. Из описания процедуры П0 следует, что при переходе к процедуре P5 выполняются следующие свойства:

(а) для любого ребра $st \in E^{0+} \cup E^{++}$ справедливо $\lambda^g(st) < h(st)$;

(б) для любой сложной вершины $A \in VH^-$ справедливо $g(A) > 0$.

Чуть позднее докажем, что верно следующее утверждение.

(3.3) При переходе к процедуре П5 каждая вершина в VH^- сложная.

Процедура П5 (*изменение g*). Вычисляем величину $\varepsilon = \min \{\varepsilon^{0+}, \varepsilon^{++}, \varepsilon^-\}$, где

$$\varepsilon^{0+} = \min \{h(st) - \lambda^g(st) : st \in E^{0+}\};$$

$$\varepsilon^{++} = \frac{1}{2} \min \{h(st) - \lambda^g(st) : st \in E^{++}\};$$

$$\varepsilon^- = \min \{g(A) : A \in VH^-\}$$

(из сказанного ранее следует, что $\varepsilon > 0$). Пополним совокупность D всеми такими одноэлементными подмножествами $\{s\}$, что s — простая вершина в VH^+ , и преобразуем g , полагая $g(A) := g(A) + \varepsilon$ для всех $A \in VH^+$ и $g(A) := g(A) - \varepsilon$ для всех $A \in VH^-$. Соответствующим образом исправляем значения $\lambda^g(st)$, $st \in E$, полагая: $\lambda^g(st) := \lambda^g(st) + 2\varepsilon$, если $st \in E^{++}$; $\lambda^g(st) := \lambda^g(st) + \varepsilon$, если $st \in E^{0+}$; $\lambda^g(st) := \lambda^g(st) - 2\varepsilon$, если $w(s), w(t) \in VH^-$, $w(s) \neq w(t)$; $\lambda^g(st) := \lambda^g(st) - \varepsilon$, если $w(s) \in VH^-$, $w(t) \in W^0$ (на остальных ребрах λ^g не изменяется). Возвращаемся к П0.

Можно убедиться, что в результате процедуры П5 новая функция g будет h -упаковкой, свойства (P1)—(P3) останутся справедливыми, а дерево H — корректным.

Корректность и сходимость алгоритма. Докажем вначале утверждение (3.3). Предположим, что некоторая

вершина $v \in VH^-$ простая, т. е. $v \in T$. Поскольку $v \in VH^-$, в H имеются смежные ребра $sv, vt \in E$, для которых $w(s), w(t) \in VH^+$ и $w(s) \neq w(t)$. Согласно условию перехода от П0 к П5 имеем $\lambda^s(st) > h(st)$. Поскольку $\{v\} \notin D$, то для всякого $A \in D$ из $\{sv, vt\} \cap \partial A \neq \emptyset$ следует $|\{sv, vt\} \cap \partial A| = 1$ и $st \in \partial A$, откуда получаем $\lambda^s(st) = \lambda^s(sv) + \lambda^s(vt)$. Но $\lambda^s(sv) = h(sv)$ и $\lambda^s(vt) = h(vt)$, следовательно, $h(s) > h(sv) + h(vt)$, что невозможно, так как h — метрика.

В результате выполнения П5 возникает по крайней мере одна из следующих ситуаций:

для некоторого $st \in E^{0+} \cup E^{++}$ становится $\lambda^s(st) = h(st)$,

для некоторого $A \in D$ становится $g(A) = 0$ (случай, когда все множества E^{0+} , E^{++} , VH^- пусты, невозможен, поскольку тогда H состояло бы из единственной вершины и было $|W| = 1$, вопреки (3.2), (а)).

Таким образом, за процедурой П5 следует П0 и затем одна из процедур П1 — П4, и, следовательно, алгоритм может окончиться только выполнением процедуры П1. Пусть N_i — число применений на этапе процедуры P_i и $N = N_0 + \dots + N_5$. Для текущих D и H положим $T^+ = \{s \in T : w(s) \in VH^+\}$ и $D^0 = \{A \in D : B \cap A = \emptyset \text{ для всех } B \in D, B \in VH^+\}$. Имеем $N_1 \leq 1$, $N_0 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ и $N_5 \leq N_1 + N_2 + N_3 + N_4$, следовательно, N оценивается как $O(N_2 + N_3 + N_4)$. Нетрудно убедиться в справедливости следующих фактов:

каждая из процедур П0 — П5 не уменьшает множество T^+ и не увеличивает множество D^0 ;

каждая из процедур П2 и П3 расширяет множество T^+ ;

каждая процедура П4 уменьшает множество D^0 . Таким образом, $N_2 + N_3 \leq |T| - 1$, и N_4 не превосходит числа элементов в начальной (на этапе) совокупности D . Ввиду (2.5) N_4 оценивается как $O(p)$. Следовательно, число шагов этапа — $O(p)$.

Чтобы оценить число действий на шагах этапа, надо уточнить используемую в алгоритме структуру данных. Множество $V = T \cup D$ задается в виде списка элементов, в котором выделены массив T и список максимальных элементов W (элементы $A \in D$ задаются в виде «идентификаторов», а не подмножеств T). Для каждого $v \in V - W$ имеется ссылка на элемент $v' \in V$, которому непосредственно подчинено v , а также ссылка на элемент $w(v)$. Для каждого $A \in D$ выделен список непосредственно подчиненных элементов W_A . Графы H и C_A , $A \in D$, задаются списками их вершин (идентификаторов) в W и ребер в E и соответствующими инцидентиями; остальные требуемые структуры задаются естественным образом. Нетрудно убедиться, что при такой организации данных каждая из процедур П1 — П4 реализуется с трудоемкостью $O(p)$ действий, а каждая из процедур П0 и П5 — с трудоемкостью $O(p^2)$ (такую трудоемкость имеет перебор элементов из E и исправление λ^s). Таким образом, трудоемкость этапа составляет $O(p^3)$, а всего алгоритма решения задачи $\mathcal{P}(K_T, T, h) — O(p^4)$ при памяти $O(p^2)$.

Нам осталось показать, что в случае циклически четной функции h алгоритм строит целочисленную оптимальную h -упаковку. Достаточно доказать, что процедура П5 сохраняет целочисленность текущей функции g , т. е. что величина ϵ^{++} целая. Для этого покажем, что величина $h(st) - \lambda^g(st)$ четная для любых $s, t \in T$ таких, что $w(s), w(t) \in VH^+$, $w(s) \neq w(t)$. Образует цикл C в F , добавив к ребру st отрезки цепей $L(w(s))$ и $L(w(t))$ до первой общей вершины. Последовательно заменяя в C сложные вершины $A \in D$ соответствующими чередующимися цепями в C_A (подобно тому, как это делается в процедуре П1), получаем цикл \bar{C} графа K . Все его ребра, кроме st , насыщенные, следовательно,

$$h(st) - \lambda^g(st) = h(E\bar{C}) - \lambda^g(E\bar{C}) = h(E\bar{C}) - \sum (g(A) | E\bar{C} \cap \partial A | : A \in D).$$

Теперь четность величины $h(st) - \lambda^g(st)$ следует из четности $h(E\bar{C})$, четности всех $|E\bar{C} \cap \partial A|$ и целочисленности g .

4. ЭКОНОМНАЯ МОДИФИКАЦИЯ

В основе модификации лежит один способ организации данных, позволяющий сократить переборы ребер на этапах второй и третьей стадий алгоритма. В результате трудоемкость второй стадии станет $O(p^3 \log p)$ вместо $O(p^4)$, а третьей — $O(pn \log n)$ вместо $O(pnm)$.

Пусть имеется текущая линейно упорядоченная совокупность объектов (с возможным равенством различных объектов), с которой производится следующая пошаговая работа. На очередном шаге из нее удаляются некоторые объекты и добавляются новые, при этом требуется, чтобы на любом шаге был известен текущий минимальный объект (произвольный, если их несколько). Организация такой совокупности в виде логарифмической справочной [13] позволяет выполнить эти операции за весь период работы с суммарной трудоемкостью $O(\eta \log \omega)$ действий при памяти $O(\omega)$, где η — общее число объектов, побывавших в совокупности за период работы, ω — максимальное число элементов, одновременно присутствующих в совокупности. (Для наших целей подходит и более просто устроенная справочная работы [14], дающая оценки трудоемкости $O(\eta \log \eta)$ и памяти $O(\eta)$.)

Рассмотрим этап работы с одним и тем же множеством A на третьей стадии алгоритма, используя обозначения из разд. 2. Будем считать, что для текущего множества X множество ребер $\partial^c X$ организовано в виде справочной \mathcal{R} , каждому ребру $e \in \mathcal{R}$ приписано число $q(e)$, определяющее упорядочение в \mathcal{R} , и имеется текущее число d . Числа d и $q(e)$, $e \in E$, в каждый момент таковы, что $q(e) - d$ равно текущему значению $l(e)$. В начале этапа в пустую справочную \mathcal{R} заносятся ребра разреза $\partial^a A$, для

которых полагается $q(e) = l(e)$, $d = 0$. Пусть перед началом очередного шага \mathcal{R} состоит из ребер разреза $\partial^G \tilde{X}$, где \tilde{X} — соответствующее множество предыдущего шага. Ясно: чтобы получить множество X данного шага, надо выделить в \mathcal{R} множество ΔE элементов e , для которых $q(e) - d = 0$ (ими являются минимальные элементы в \mathcal{R} ввиду $l \geq 0$), взять множество ΔZ тех концов ребер из ΔE , которые лежат в $VG - \tilde{X}$, и распырить ΔZ до множества Z вершин в $VG - \tilde{X}$, соединимых цепями нулевой длины с какими-либо вершинами из ΔZ ; тогда $X = \tilde{X} \cup Z$.

Таким образом, новая справочная \mathcal{R} (соответствующая разрезу $\partial^G X$) получается из старой удалением всех ребер с одним концом в Z и другим в \tilde{X} и добавлением всех ребер с одним концом в Z и другим в $VG - X$; для этих новых ребер полагается $q(e) = l(e) + d$. Число a данного шага равно $q(e_0) - d$, где $q(e_0)$ — минимальный элемент в новом \mathcal{R} . Наконец, при переходе к следующему шагу полагается $d := d + a$ (это соответствует уменьшению на a длин ребер в $\partial^G X$). Очевидно, каждое ребро $e \in EG$ может быть включено в \mathcal{R} не более одного раза, следовательно, трудоемкость работы со справочной за весь этап будет $O(m \log m)$ или $O(m \log n)$. При переходе к следующему этапу (с новым A) справочная \mathcal{R} полностью очищается; при всяком удалении из \mathcal{R} ребра e восстанавливается его истинная текущая длина $l(e) = q(e) - d$.

Опишем теперь модификацию этапа алгоритма второй стадии. Отличия от изложенного в разд. 3 состоят в следующем.

1. В модификации не требуется поддерживать функцию λ^s . Пусть $V(v)$ и $T(v)$, где $v \in V$, обозначают соответственно множества $\{v\} \cup \{x \in V : x \prec v\}$ и $T \cap V(v)$, а $g^*(v)$ — величину $\Sigma(g(A) : A \in D, v \leq A)$. Нетрудно видеть, что $\lambda^s(st) = g^*(s) + g^*(t)$ для любых $s, t \in T$ таких, что $w(s) \neq w(t)$. Заметим, что из утверждения (2.5) следует, что $|V(v)|$ имеет порядок $O(|T(v)|)$. Для произвольного $v \in W$ значения $g^*(x)$ для всех $x \in V(v)$ можно вычислить рекуррентно за $O(|V(v)|)$ или $O(|T(v)|)$ действий. Таким образом, для произвольных $v, v' \in W$, $v \neq v'$, величины $\lambda^s(st)$ для всех ребер $st \in E$ с $s \in T(v)$ и $t \in T(v')$ можно определить за $O(|T(v)||T(v')|)$ действий.

2. Ребра текущего множества E^{++} организованы в виде справочной \mathcal{R}^{++} . Ребрам st в \mathcal{R}^{++} приписаны числа $b(st)$ (определяющие упорядочение в справочной), а справочной в целом — число d ; эти числа таковы, что $b(st) - d$ равно текущей величине $h(st) - \lambda^s(st)$. Для каждого $s \in T$ такого, что $w(s) \in VH^- \cup W^0$, ребра st , для которых $w(t) \in VH^+$, организованы в виде справочной $\mathcal{R}(s)$. Ребрам st в $\mathcal{R}(s)$ приписаны числа $c(st)$ (определяющие упорядочение в справочной), а справочной в целом — число $d(s)$; при этом $c(st) - d(s)$ равно текущей величине $h(st) - \lambda^s(st)$. В начале этапа справочные создаются заново, и все числа d и $d(s)$ полагаются равными нулю. Как только ребро st удаляется из справочной, для него за $O(1)$ действий восстанавливается текущее значение $\lambda^s(st)$.

3. Первая часть процедуры П0 сводится к просмотру минимальных элементов справочных \mathcal{R}^{++} и $\mathcal{R}(s)$ для всех $s \in T$ таких, что $w(s) \in W^0$. Среди них ищется элемент st , для которого $b(st) - d = 0$ при $st \in \mathcal{R}^{++}$ или $c(st) - d(s) = 0$ при $st \in \mathcal{R}(s)$. Таким образом, трудоемкость однократного выполнения процедуры П0 — $O(p)$. При процедуре П5 число ε^{++} определяется как $(b(st) - d)/2$, а ε^{0+} — как $\min \{c(st) - d(s) : s \in T, w(s) \in W^0\}$, где st — минимальный элемент соответствующей справочной. Изменению функции g на этой процедуре соответствует корректура d и $d(s)$ для всех $s \in T$, $w(s) \in W^0$, а именно: $d := d + 2\varepsilon$, $d(s) := d(s) + \varepsilon$.

4. После каждой из процедур П2 — П4 следует производить корректировку справочных \mathcal{R}^{++} и $\mathcal{R}(s)$. Опишем ее на примере процедуры П4, состоящей в разрушении сложной вершины $A \in VH^-$. Пусть $\tilde{D} = D - \{A\}$, $\tilde{W} = (W - \{A\}) \cup W_A$ и \tilde{H} — объекты, получающиеся из D , W и H в результате этой процедуры. Пусть, далее, $W_A^+ = W_A \cap V\tilde{H}^+$, $W_A^- = W_A \cap V\tilde{H}^-$ и $W_A^0 = W_A \cap \tilde{W}^0$; ясно, что $V\tilde{H}^+ = VH^+ \cup W_A^+$, $V\tilde{H}^- = (VH^- - \{A\}) \cup W_A^-$, $\tilde{W}^0 = W^0 \cup W_A^0$. Вычислим значения $\lambda^s(st)$ для всех $s, t \in T$ таких, что $s \preceq v'$ и $t \preceq v''$, где v' пробегает множество $V\tilde{H}^- \cup \tilde{W}^0$, а v'' — множество W_A^+ (согласно сказанному выше, это требует числа действий, пропорционального числу таких ребер st). Теперь для каждого $s \in T$ такого, что $s \preceq v'$, $v' \in V\tilde{H}^- \cup \tilde{W}^0$, надо внести в $\mathcal{R}(s)$ все ребра $st \in E$ для $t \preceq v''$, $v'' \in W_A^+$, положив $c(st) = h(st) - \lambda^s(st) + d(s)$. Кроме того, для каждого $s \in T$ такого, что $s \preceq v''$, $v'' \in W_A^+$, все элементы $st \in E$, для которых $t \preceq x$, $x \in VH^+$, следует перенести из справочной $\mathcal{R}(s)$ в справочную \mathcal{R}^{++} , положив $b(st) = c(st) - d(s) + d$; после этого справочная $\mathcal{R}(s)$ перестает существовать.

Учитывая тот факт, что в процессе этапа множество $T^+ = \{s \in T : w(s) \in VH^+\}$ не уменьшается (см. разд. 3), каждое ребро $st \in E$ может только один раз включиться в справочную $\mathcal{R}(s)$ или $\mathcal{R}(t)$ и может только один раз включиться в справочную \mathcal{R}^{++} . Следовательно, суммарная трудоемкость работы со всеми справочными на этапе — $O(p^2 \log p)$. Отсюда получаем, что этап имеет трудоемкость $O(p^2 \log p)$, а вся вторая стадия — $O(p^3 \log p)$ при памяти $O(p^2)$. Это дает нам указанную оценку для модифицированного алгоритма решения исходной задачи $\mathcal{P}(G, T, l)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Edmonds J., Johnson E. L. Matchings, Euler tours and Chinese postman.— Math. Programming, 1973, N 5, p. 88—124.
2. Lovasz L. 2-matchings and 2-covers of hypergraphs.— Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1975, N 26, p. 433—444.
3. Seymour P. D. On old cuts and plane multicommodity flows.— Proc. London Math. Soc., 1981, N 42, v. 3, p. 178—192.

4. Karzanov A. V. A generalised MFMC-property and multicommodity cut problems.— In: Finite and Infinite Sets (Proc. of the 6th Hungarian Combinatorial Colloquium, Eger, Hungary, 1981), v. 2/Ed. A. Hajnal, L. Lovasz. V. T. Sos, Amsterdam: North-Holland, 1984, p. 443—486.
5. Seymour P. D. Sums of circuits.— In: Graph Theory and Related Topics/Ed. J. A. Bondy, U. S. R. Murty.— N. Y.: Acad. Press, 1978, p. 341—355.
6. Карзанов А. В. Задачи о мультиразрезах и методы их решения.— М.: ВНИИСИ, 1982.
7. Карзанов А. В. Справочная для выборки максимального элемента и ее приложения.— В кн.: Исследования по дискретной оптимизации/Под ред. А. А. Фридмана. М.: Наука, 1976, с. 348—359.
8. Карзанов А. В. Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках.— В кн.: Комбинаторные методы в потоковых задачах.— М.: ВНИИСИ, 1979, вып. 3, с. 6—69.
9. Адельсон-Вельский Г. М., Ландис Е. М. Один алгоритм организации информации.— Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 2.
10. Кристофидес Н. Теория графов.— М.: Мир, 1978.
11. Edmonds J. The Chinese postman problem.— Operations Research. 13 Suppl., 1965, N 1, p. 373.
12. Mei-Ko K. Graphic Programming using odd or even points.— Chinese Mathematics, 1962, N 1. p. 273—277.
13. Seymour P. D. On multi-colourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte.— Proc. London Math. Soc., 1979, 9(3), N 38, p. 423—460.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА И ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ И УПАКОВКИ В МАТРОИДАХ

А. К. КЕЛЬМАНС, В. П. ПОЛЕССКИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию различных аспектов задач покрытия и упаковки в матроидах [1], а именно: взаимосвязи этих задач между собой и с задачами построения базы суммы матроидов, алгоритмов их решения, многообразия возможных решений и т. д. Основные понятия и обозначения, а также некоторые сведения из теории матроидов изложены в разд. 2.

В 1971 г. А. К. Кельманс предложил конструктивное описание цикла суммы матроидов и понятие увеличивающего пути для увеличения независимого множества суммы матроидов [2]. Эти понятия и результаты изложены в разд. 3 и играют важную роль в дальнейших рассуждениях. В частности, видно, что из конструкции цикла суммы матроидов непосредственно следуют:

теоремы Нэш-Вильямса о ранге суммы матроидов, а также о том, что сумма матроидов есть матроид;

алгоритм отыскания базы суммы нескольких матроидов, а значит, и решения задач упаковки и покрытия, требующий $O(|E|)^3$ обращений к оракулам независимости.

Сочетание этих идей с идеями В. П. Полесского об алгоритмах упаковки и покрытия для графов [3—5] позволило построить для одинаковых матроидов алгоритмы решения указанных задач, требующих рекордно маленького числа $O(|E|^2)$ обращений к оракулу независимости (см. разд. 8). В разд. 4 полноты ради описаны применения теоремы Нэш-Вильямса к задачам покрытия, упаковки, а также пересечения в матроидах. В разд. 5 рассматриваются так называемые экстремальные множества набора матроидов [6], которые естественно интерпретировать как препятствия, ограничивающие возможности построения базы заданных размеров в сумме матроидов. Устанавливается, что совокупность экстремальных множеств образует решетку. Эта решетка была открыта независимо многими авторами (см. [7, 8]). Дается ее описание в различных терминах. Другие описания и многочисленные приложения изложены в [7, 8].

В разд. 6 вводится понятие базового ряда последовательности матроидов (см. также [2]). Прообразом понятия базового ряда последовательности одинаковых матроидов служит введенное В. П. Полесским [4] в 1971 г. понятие регулярной упаковки стягивающих лесов графа. Базовый ряд последовательности матроидов на множестве E представляет некоторое особое разбиение множества элементов базы суммарного матроида на независимые множества соответствующих матроидов, в частности, содержащие максимальную упаковку баз этих матроидов. Таким образом, построение базового ряда дает одновременно решение задач покрытия и упаковки для заданных матроидов. В разд. 7 выясняется, что базовый ряд последовательности матроидов допускает естественную декомпозицию относительно экстремального множества этой последовательности. В разд. 8 приводится алгоритм построения базового ряда последовательности нескольких матроидов, требующий $O(|E|^3)$ обращений к оракулам независимости, описывающих совокупность матроидов. В случае одинаковых матроидов удастся найти алгоритм построения базового ряда, имеющий $O(|E|^3)$ обращений к оракулу независимости. Этот алгоритм позволяет, в частности, решать задачи построения базы суммы заданного числа одинаковых матроидов, а значит, и задачи покрытия и упаковки для данного матроида. В разд. 9 проводится качественное сравнение некоторых матроидных алгоритмов.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРОИДОВ

2.1. Пусть E — конечное множество. Если $X \subseteq E$, то пусть $\bar{X} = E \setminus X$, а $|X|$ — число элементов в X . Если $A, B \subseteq E$ и $A \cap B = \emptyset$, то вместо $A \cup B$ запишем $A + B$. Система $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ подмножеств из E называется *системой независимости*, а множества из \mathcal{I} — независимыми, если

$$(\mathcal{I}1) \emptyset \in \mathcal{I}, \quad (\mathcal{I}2) A \in \mathcal{I} \text{ и } B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{I}.$$

Максимальное по включению множество в \mathcal{I} называется базой системы \mathcal{I} . Множество всех баз в \mathcal{I} обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{I})$. Подмножество A из E называется зависимым, если $A \notin \mathcal{I}$. Минимальное по включению зависимое подмножество из E называется циклом системы \mathcal{I} . Множество всех циклов в \mathcal{I} обозначается через $\mathcal{C}(\mathcal{I})$.

Система независимости $\mathcal{I} = M$ называется матроидом [4], если $(\mathcal{I}3) A, B \in \mathcal{I}$ и $|A| > |B| \Rightarrow \exists a \in A \setminus B : B + a \in \mathcal{I}$.

Можно доказать, что система $\mathcal{B}(M)$ баз матроида M обладает свойствами

$$(\mathcal{B}0) A, B \in \mathcal{B}(M) \Rightarrow |A| = |B|,$$

$$(\mathcal{B}1) A, B \in \mathcal{B}(M), a \in A \Rightarrow \exists b \in B : A \setminus a + b \in \mathcal{B}(M),$$

$$(\mathcal{B}1)^* A, B \in \mathcal{B}(M), b \in B \Rightarrow \exists a \in A : A \setminus a + b \in \mathcal{B}(M),$$

а система $\mathcal{C}(M)$ циклов матроида M — следующими свойствами:

$$(\mathcal{C}1) A, B \in \mathcal{C}(M) \Rightarrow A \not\subseteq B,$$

$$(\mathcal{C}2) A, B \in \mathcal{C}(M), x \in A \cap B \Rightarrow \exists C \in \mathcal{C}(M) : C \subseteq A \cup B \setminus x,$$

$$(\mathcal{C}2') A, B \in \mathcal{C}(M), x \in A \cap B, y \in A \setminus B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists C \in \mathcal{C}(M) : y \in C \subseteq A \cup B \setminus x.$$

Можно доказать, что $\mathcal{B}^*(M) = \{E \setminus B : B \in \mathcal{B}(M)\}$ есть множество баз некоторого матроида M^* . Матроид M^* называют двойственным к M . Базу B^* и цикл C^* матроида M^* называют соответственно кобазой и коциклом матроида M . Множество всех коциклов M обозначается через $\mathcal{C}^*(M)$, так что $\mathcal{B}^*(M) = \mathcal{B}(M^*)$ и $\mathcal{C}^*(M) = \mathcal{C}(M^*)$.

Можно показать: если $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ обладает свойствами $(\mathcal{B}0)$ и $(\mathcal{B}1)$ или $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ — свойствами $(\mathcal{C}1)$, $(\mathcal{C}2)$, то \mathcal{I} обладает свойствами $(\mathcal{I}2)$ и $(\mathcal{I}3)$, т. е. \mathcal{I} есть матроид. Для $T \subseteq 2^E$ и $X \subseteq E$ назовем систему множеством $\{A : A \in T, A \subseteq X\}$ ограничением $T|_X$ системы T на множество X .

Очевидно, $M|_X$ есть матроид. Обозначим $M|_X$ через $M \cdot X$ или $M \setminus \bar{X}$, а $(M^*|_X)^*$ через $M \times X$ или $M \setminus \bar{X}$. Очевидно, $\mathcal{C}(M \cdot X) = \mathcal{C}(M)|_X$ и $\mathcal{C}^*(M \times X) = \mathcal{C}^*(M)|_X$. Матроид $M \cdot X = M \setminus \bar{X}$ называют матроидом-ограничением M на X , а $M \times X = M \setminus \bar{X}$ — матроидом-сжатием M на X .

Согласно $(\mathcal{B}0)$ все базы матроида M имеют одинаковое число элементов, которое называется рангом матроида M и обозначается через $r(M)$. Число $r^*(M) = |E| - r(M)$ называется ко-рангом M и, очевидно, есть ранг $M^* : r^*(M) = r(M^*)$.

Целочисленная функция $\rho_M = \rho$ на множестве 2^E всех подмножеств из E называется ранговой функцией матроида M , если $\rho(X) = r(M \cdot X)$ для $X \subseteq E$, так что $\rho(X)$ есть мощность максимального независимого множества в X . Вместо ρ_M^* пишем ρ^* . Можно доказать, что ранговая функция матроида обладает

следующими свойствами:

$$(\rho 1) 0 \leq \rho(X) \leq |X|,$$

$$(\rho 2) X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \quad (\text{монотонность}),$$

$$(\rho 3) \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad (\text{субмодулярность}).$$

Функция $\text{cl} : 2^E \rightarrow 2^E$ называется *оператором замыкания* для M , если для любого $X \subseteq E$ $x \in \text{cl}(X) \Leftrightarrow \rho(X) = \rho(X + x)$. Можно доказать, что оператор замыкания обладает свойствами

$$(\text{cl } 1) X \subseteq \text{cl}(X),$$

$$(\text{cl } 2) X \subseteq Y \Rightarrow \text{cl}(X) \subseteq \text{cl}(Y),$$

$$(\text{cl } 3) \text{cl}(\text{cl}(X)) = \text{cl}(X).$$

Из свойства $(\mathcal{C} 2)$ циклов следует: если $X \subseteq M$, но для $x \in E \setminus X$ $X + x \not\subseteq M$, то в $X + x$ существует единственный цикл и он содержит x ; обозначим этот цикл через $C(M, X + x)$ или просто $C(X + x)$. Очевидно, $X + x \setminus y \subseteq M$, если и только если либо $X + x \subseteq M$, либо $X + x \not\subseteq M$, но $y \in C(M, X + x)$.

Цикл (коцикл) матроида M , состоящий из одного элемента, называется *петлей* M (соответственно *копетлей* или *перешейком* M). Множество всех копетель матроида M обозначается через $I(M)$. Положим $D(M) = E \setminus I(M)$. Можно доказать, что $D(M)$ есть множество всех элементов $e \in E$ таких, что e принадлежит некоторому циклу из $\mathcal{C}(M)$, а именно: $D(M) = \{e \in E : e \in C \in \mathcal{C}(M)\}$. Матроид M называется *свободным*, если $D(M) = \emptyset$.

2.2. Для ориентированного графа Γ через $V\Gamma$ и $E\Gamma$ обозначается [9] множество вершин и дуг графа Γ соответственно. Путь P в Γ — это последовательность вершин (p_0, \dots, p_k) такая, что $(p_i, p_{i+1}) \in E\Gamma$ для любого $i \in \{0, \dots, k-1\}$, а k есть длина пути P . Если в этой последовательности нет одинаковых вершин, то путь P называется *простым*. Для $X \subseteq V\Gamma$ через $\Gamma(X)$ обозначается множество всех вершин в Γ , достижимых по путям из X , так что $X \subseteq \Gamma(X)$. Положим $\mathcal{L}(\Gamma) = \{X : X \subseteq V\Gamma, \Gamma(X) \subseteq X\}$ (считаем, что $\emptyset \in V\Gamma$, так что $\emptyset \in \mathcal{L}(\Gamma)$). Очевидно, подмножество вершин в Γ принадлежит семейству подмножеств $\mathcal{L}(\Gamma)$, если и только если ни одна дуга графа Γ не выходит из X . Множество всех дуг Γ , выходящих в X (начало входящей дуги — в $V\Gamma \setminus X$, а конец — в X), образует так называемый *ориентированный разрез* орграфа Γ . Очевидно, $\mathcal{L}(\Gamma)$ есть решетка множеств, замкнутая относительно объединения. Будем называть $\mathcal{L}(\Gamma)$ *решеткой ориентированных разрезов графа Γ* . Пусть A_1, \dots, A_n — бикомпоненты графа Γ . Тогда $\{A_i : i = 1, \dots, n\}$ есть множество всех так называемых *join-неразложимых элементов решетки $\mathcal{L}(\Gamma)$* , а $\{A_1, \dots, A_n\}$ — главное разбиение для решетки множеств $\mathcal{L}(\Gamma)$ [8].

2.3. Пусть $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$ есть последовательность систем множеств A_i на E . Система множеств $A = \{X = U\{X_i \in A_i : i =$

$= 1, \dots, k\}$ называется суммой систем A_1, \dots, A_k и обозначается через $A_1 + \dots + A_k$ или $\bigvee_{i=1}^k A_i$. Последовательность $\lambda = (X_1, \dots, X_k)$ множеств из E назовем \mathcal{A} -последовательностью или \mathcal{A} -упаковкой, если $X_i \in A_i$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Если $X \in A$, то существует и, вообще говоря, не одна \mathcal{A} -последовательность $\lambda = (X_1, \dots, X_k)$ такая, что $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$. Такую \mathcal{A} -последовательность назовем \mathcal{A} -разбиением или \mathcal{A} -раскраской множества $X \in \bigvee_{i=1}^k A_i$.

Предположим, все A_i из \mathcal{A} есть системы независимости. Тогда, очевидно, A есть также система независимости. Для такого \mathcal{A} по каждой \mathcal{A} -последовательности $\lambda = (X_1, \dots, X_k)$ построим граф $\Gamma_\lambda(\mathcal{A}) = \Gamma_\lambda$ следующим образом: $V\Gamma_\lambda = E$ и для $x, y \in E$ (x, y) есть дуга в Γ_λ , если и только если

для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$ $x \notin X_i$, а $y \in X_i$;

y принадлежит некоторому циклу системы независимости A_i , лежащему в $X_i + x$.

Путь в графе $\Gamma_\lambda(\mathcal{A})$ будем называть λ -путем. λ -путь назовем активным или увеличивающим путем, если найдется X_i из λ такое, что последний элемент x этого пути не принадлежит X_i и $X_i + x \in A_i$. Элемент x из E назовем λ -активным, если x принадлежит некоторому λ -активному пути.

При рассмотрении фиксированного \mathcal{A} -разбиения $\lambda = (X_1, \dots, X_k)$ множества X удобно считать, что элементы множества X_i окрашены в цвет i , а элементы из $E \setminus X$ не окрашены. Тогда процесс перестройки \mathcal{A} -разбиения λ можно интерпретировать как процесс перекраски и окраски элементов из E .

3. ПОНЯТИЕ УВЕЛИЧИВАЮЩЕГО ПУТИ И КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ ЦИКЛА СУММЫ МАТРОИДОВ

Важную роль в теории матроидов играет понятие суммы матроидов (см. [10]). Оно оказывается весьма существенным для задач максимальной упаковки баз матроидов, минимального покрытия исходного множества E базами (или независимыми множествами) матроида, а также отыскания максимального независимого множества двух матроидов на одном и том же множестве E (см. [1, гл. 8]). В настоящем разделе дано понятие увеличивающего или активного пути, интересного тем, что с его помощью всегда можно увеличить независимое множество суммы матроидов, если оно не максимально. Приведено конструктивное описание цикла суммы матроидов, которое существенно используется в дальнейшем. С помощью этого описания цикла суммы матроидов даны простые доказательства теорем Нэш-Вильямса о сумме матроидов [10].

3.1. Пусть $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$ есть последовательность матроидов на множестве E и $\lambda = (X_1, \dots, X_k)$ есть некоторая \mathcal{M} -последовательность (см. 2.3). λ -путь $P = (x_0, \dots, x_m)$ назовем *активным* (или *увеличивающим*) путем, если найдется $X_i \in \lambda$ такое, что $x_m \notin X_i$ и $X_i + x_m \in M_i$. Элемент x из E назовем λ -активным, если x принадлежит некоторому λ -активному пути. Далее всюду r_i есть ранговая функция матроида M_i .

3.2. Лемма. Пусть $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$ — последовательность матроидов на множестве E , $\lambda = (X_1, \dots, X_k)$ есть \mathcal{M} -разбиение множества X из $M = \bigvee_1^k M_i$. Если элемент $z \in E \setminus X$ λ -активен, то $X + z \in M$.

Доказательство. Пусть $P = (z = x_0, x_1, \dots, x_m)$ — активный λ -путь, $x_k \in X_{i_k}$, $k = 1, \dots, m$, так что $x_m + X_p \in M_p$ для некоторого $p \in \{1, \dots, k\}$, $p = i_m$. Если $m = 0$, то $X_p + z \in M_p$, значит, $X + z = (X_i + z) + \sum \{X_j, j \neq i\} \in M$. Предположим, лемма верна для активных λ -путей длины меньше m . Покажем, что она верна также для активного λ -пути длины m . Построим новое \mathcal{M} -разбиение $\lambda' = (X'_1, \dots, X'_k)$ множества X , положив $X'_i = X_i$ для $i \neq i_m$, p и $X'_{i_m} = X_{i_m} \setminus x_m$, $X'_p = X_p + x_m$. Предположим, $P^* = (z = x_0, \dots, x_{m-1})$ есть λ' -путь. Так как $x_{m-1} \notin X'_{i_m}$ и $X'_{i_m} + x_{m-1} \in M_{i_m}$, то P^* есть активный λ' -путь длины $m - 1$, значит, по предположению индукции $X + z \in M$. Предположим теперь, что P^* не есть λ' -путь. Пусть тогда c — наименьший номер, для которого дуга (x_c, x_{c+1}) пути P не есть λ' -дуга, так что $P' = (z = x_0, \dots, x_c)$ есть λ' -путь. Очевидно, (x_c, x_{c+1}) не есть λ' -дуга, если и только если $x_{c+1}, x_m \in C(M_{i_m}, X_{i_m} + x_c)$. Поэтому $X'_{i_m} + x_c = X_{i_m} + x_c \setminus x_m \in M_{i_m}$, значит, P' есть активный λ' -путь длины $c \leq m - 1$. По предположению индукции $X + z \in M$. \square

3.3. Лемма. Пусть $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$ — последовательность матроидов на E , $\beta = (X_1, \dots, X_k)$ — \mathcal{M} -разбиение множества $X \in VM_i$. Предположим, элементы множества $Y \subseteq \bar{X}$ не β -активны. Положим $A = \Gamma(Y)$. Тогда $X'_i = X_i \cap A$ есть база матроида $M'_i = M_i \cdot A$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Предположим, $X_i + x \in M_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$ и $x \in A \setminus X$. Так как $x \in A$, то существует β -путь P из некоторого $y \in Y$ в x . Так как $X_i + x \in M_i$, то β -путь P активен, значит, y — β -активный элемент в Y — противоречие. Поэтому $x + X_i \notin M_i$ для любых $i \in \{1, \dots, k\}$ и $x \in A \setminus X$. Тогда $C(M_i, X + x) \cap X_i \subseteq X'_i$, так что $X'_i + x \notin M_i$, следовательно, X'_i есть база в M'_i . \square

3.4. Следствие. В условиях леммы 3.3 $X \cap A$ есть база системы независимости $VM_i|_A$.

3.5. Теорема. Пусть $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$ — последовательность матроидов на множестве E , $M = \bigvee_{i=1}^k M_i$ и $\beta = (X_1, \dots, X_k)$ — \mathcal{M} -разбиение $X \in M$ и пусть $a \in \bar{X}$. Если a не β -активно, то $X + a$ содержит и при том единственный цикл системы независимости M , и этот цикл есть $A = \Gamma_\beta(a)$.

Доказательство. По лемме 3.3 $A \notin M$. По лемме 3.2 $A \setminus x \in M$ для любого $x \in A$. Таким образом, A есть единственный цикл системы M в $X + a$. \square

3.6. Из леммы 3.2 и теоремы 3.5 вытекает

Теорема. Пусть $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$ — последовательность матроидов на множестве E , $\beta = (X_1, \dots, X_k)$ — \mathcal{M} -разбиение $X \in \bigvee_{i=1}^k M_i$ и $a \in \bar{X}$. Тогда $X + a \in \bigvee_{i=1}^k M_i$, если и только если элемент a β -активен.

Таким образом, если $X \in \bigvee_{i=1}^k M_i$ — не максимальное независимое множество в $\bigvee_{i=1}^k M_i$, то его всегда можно увеличить с помощью активного пути. Доказательство леммы 3.2 фактически содержит алгоритм увеличения множества X с помощью активного пути. Этот алгоритм перестраивает \mathcal{M} -разбиение β множества X в новое \mathcal{M} -разбиение β' множества X так, чтобы β -активный элемент $a \notin X$ можно было добавить к некоторому множеству X'_i в β' и получить по-прежнему независимое множество $X'_i + a$ в M . В качестве активного β -пути можно выбрать кратчайший активный путь $P = (a = x_0, \dots, x_m)$ в Γ_β . Тогда $P' = (a = x_0, \dots, x_{m-1})$ есть, очевидно, кратчайший активный путь в новом орграфе $\Gamma_{\beta'}$ (см. 3.2). Таким образом, если окрасить элемент x_i пути P в цвет элемента x_{i+1} , $i = 0, \dots, m-1$, и окрасить элемент x_m в цвет p , то для каждого $j = 1, \dots, k$ новое множество цвета j окажется независимым в M_j . Указанный алгоритм увеличения независимого множества X в $\bigvee_{i=1}^k M_i$ используется в алгоритмах решения задач покрытия и упаковки в матроидах, описанных далее.

3.7. Из теоремы 3.5 вытекает ряд следствий.

3.7.1. Так как из 3.5 для любых $X \in \bigvee_{i=1}^k M_i$ и $x \in \bar{X}$ множество $X + x$ имеет не более одного цикла семейства независимости $\bigvee_{i=1}^k M_i$, то получаем

Следствие (Нэш-Вильямс [10]). Сумма матроидов есть матроид.

3.7.2. Следствие. Пусть B — база матроида $\bigvee_{i=1}^k M_i$ и $\gamma = (B_1, \dots, B_k)$ есть \mathcal{M} -разбиение B . Тогда $D\left(\bigvee_{i=1}^k M_i\right) = \Gamma_\gamma(\bar{B})$.

3.7.3. Следствие. Если C — цикл матроида $\bigvee_1^k M_i$, то $|C| = 1 + \sum_1^k \rho_i(C)$.

Это утверждение было другим способом доказано в [11].

3.7.4. Следствие. Подмножество C из E есть цикл матроида $\bigvee_1^k M_i$, если и только если для некоторого (a на самом деле, для любого) $c \in C$ существует \mathcal{M} -разбиение $\gamma = (X_1, \dots, X_k)$ множества $X = C \setminus c$ такое, что

X есть база матроида $M_i \cdot C$, $i = 1, \dots, k$;
 $C = \Gamma_\gamma(c)$.

3.7.5. Из следствия 3.7.3 получаем

Следствие. $C \subseteq E$ есть цикл матроида $\bigvee_1^k M_i$, если и только если для каждого элемента $c \in C$ существует \mathcal{M} -разбиение (X_1, \dots, X_k) множества $X = C \setminus c$ такое, что X_i есть база $M_i \cdot C$, $i = 1, \dots, k$.

3.8. Очевидно, $r\left(\bigvee_1^k M_i\right) \leq \sum_1^k \rho_i(X) + |\bar{X}|$ для любого $X \subseteq E$. Из леммы 3.3 и следствия 3.7.2 следует, что в указанном выше неравенстве для $X = D\left(\bigvee_1^k M_i\right)$ достигается равенство. Таким образом, доказана

Теорема (Нэш-Вильямс [10]).

$$r\left(\bigvee_1^k M_i\right) = \min \left\{ \sum_1^k \rho_i(X) + |\bar{X}| : X \subseteq E \right\} = \\ = \sum_1^k \rho_i\left(D\left(\bigvee_s^k M_i\right)\right) + \left| E \setminus D\left(\bigvee_s^k M_i\right) \right|.$$

4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НЭШ-ВИЛЬЯМС О РАНГЕ СУММЫ МАТРОИДОВ К ЗАДАЧАМ УПАКОВКИ, ПОКРЫТИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В МАТРОИДАХ

4.1. Пусть M_i , $i = 1, \dots, k$, — матроиды на E и $M^s = \bigvee_1^s M_i$.

Очевидно, в E существует k попарно не пересекающихся баз матроидов M_1, \dots, M_k , если и только если $r(M^k) = \sum_1^k r(M_i)$, а задача отыскания k непересекающихся баз матроидов M_1, \dots, M_k (ее называют задачей об упаковке баз матроидов M_1, \dots, M_k в E) сводится к задаче построения базы суммарного матроида M^k (об алгоритме решения этой задачи см. разд. 8).

4.1.1. Из теоремы Нэш-Вильямса (см. 3.8) вытекает следующий известный критерий существования упаковки без матроидов M_1, \dots, M_k в E .

Теорема [1]. В E существует набор B_1, \dots, B_k попарно не пересекающихся баз матроидов M_1, \dots, M_k соответственно, если и только если $\sum_1^k r(M_i \times X) \leq |X|$ для любого $\bar{A} \subseteq E$.

Доказательство:

Допустим, в E существует набор B_1, \dots, B_k попарно не пересекающихся баз матроидов M_1, \dots, M_k , так что $r(M^k) = \sum_1^k |B_i| = \sum_1^k r(M_i)$. По теореме Нэш-Вильямса (см. 3.8) $\sum_1^k r(M_i) = r(M^k) = \min \left\{ \sum_1^k \rho_i(A) + |\bar{A}| : A \subseteq E \right\}$, так что $\sum_1^k (r(M_i) - \rho_i(A)) \leq |\bar{A}|$ для любого $A \subseteq E$. Поскольку $r(M_i) - \rho_i(A) = r(M_i \times \bar{A})$, то $\sum_1^k r(M_i \times \bar{A}) \leq |\bar{A}|$ для любого $\bar{A} \subseteq E$.

Допустим, $\sum_1^k r(M_i \times \bar{A}) \leq |\bar{A}|$ для любого $\bar{A} \subseteq E$. Тогда $\sum_1^k (r(M_i) - \rho_i(A)) \leq |\bar{A}|$ для любого $A \subseteq E$, значит, $\sum_1^k r(M_i) \leq \min \left\{ \left(\sum_1^k \rho_i(A) + |\bar{A}| \right) : A \subseteq E \right\}$. По теореме Нэш-Вильямса (см. 3.7.2) правая часть неравенства равна $r(M^k)$, так что $\sum_1^k r(M_i) \leq r(M^k)$. Но очевидно, $\sum_1^k r(M_i) \geq r(M^k)$. Таким образом, $\sum_1^k r(M_i) = r(M^k)$, значит, в E существует набор B_1, \dots, B_k попарно не пересекающихся баз матроидов M_1, \dots, M_k . \square

Подмножество $X \subseteq E$, для которого $|X| < \sum_1^k r(M_i \times X)$, естественно назвать **препятствием к упаковке баз матроидов M_1, \dots, M_k в E** .

4.1.2. Из теоремы 4.1.1 непосредственно получаем

Следствие. Матроид M на E имеет k попарно не пересекающихся баз, если и только если $k \cdot r(M \times X) \leq |X|$ для любого $X \subseteq E$.

4.1.3. Обозначим через $\text{pack } M$ максимальное число попарно не пересекающихся баз матроида M . Из 4.1.2 имеем

Следствие. $\text{pack } M = \min \left\{ \left\lfloor \frac{|X|}{r(M \times X)} \right\rfloor : X \subseteq E \right\}$.

Задача определения набора B_1, \dots, B_p из $p = \text{rank } M$ попарно не пересекающихся без матроида M в E сводится, очевидно, к последовательности задач упаковки баз M в заданном (все увеличивающемся) их числе.

4.2. Пусть, как и в 4.1, $M_i, i = 1, \dots, k$, — матроиды на E и $M^s = \bigvee_1^s M_i$. Очевидно, E есть объединение k независимых множеств

$$X_i \in M_i, i = 1, \dots, k \left(E = \bigcup_1^k X_i \right), \text{ если и только если } r(M^k) = |E|.$$

Поэтому задача отыскания k независимых множеств X_1, \dots, X_k матроидов M_1, \dots, M_k , объединение которых есть E (ее называют задачей о покрытии основного множества E независимыми множествами матроидов M_1, \dots, M_k) сводится все к той же задаче о построении базы суммарного матроида M^k .

4.2.1. Из теоремы Нэш-Вильямса (3.7.2) вытекает

Теорема [1]. E представимо в виде объединения k независимых множеств X_i из $M_i, i = 1, \dots, k$, если и только если $\sum_1^k r(M_i \cdot A) \geq |A|$ для любого $A \subseteq E$.

Доказательство:

Допустим, $E = \bigcup_1^k X_i, X_i \in M_i$, т. е. $r(M^k) = |E|$. Тогда по теореме Нэш-Вильямса (3.7.2)

$$|E| = r(M^k) = \min \left\{ \sum_1^k r(M_i \cdot A) + |\bar{A}| : A \subseteq E \right\},$$

так что $|E| - |\bar{A}| = |A| \leq \sum_1^k r(M_i \cdot A)$ для любого $A \subseteq E$.

Допустим, $|A| \leq \sum_1^k r(M_i \cdot A)$ для любого $A \subseteq E$. Тогда

$$|E| \leq \min \{ r(M_i \cdot A) + |\bar{A}| : A \subseteq E \}.$$

По теореме Нэш-Вильямса (3.7.2) правая часть неравенства равна $r(M^k)$, так что $|E| \leq r(M^k)$. С другой стороны, очевидно, $|E| \geq r(M^k)$. Таким образом, $|E| = r(M^k)$, значит, $E = \bigcup_1^k X_i$ для некоторых $X_i \in M_i, i = 1, \dots, k$.

Подмножество $X \subseteq E$, для которого $|X| > \sum_1^k r(M_i \cdot X)$, естественно назвать препятствием к покрытию множества E k независимыми множествами матроидов M_1, \dots, M_k . Очевидно, минимальные (по включению) препятствия есть циклы матроида

$$M^k = \bigvee_1^k M_i.$$

4.2.2. Из теоремы 4.2.1 получаем

Следствие. Пусть M — матроид на E . Тогда E есть объединение k независимых множеств матроида M , если и только если $k \cdot r(M \cdot A) \geq |A|$ для любого $A \subseteq E$.

4.2.3. Обозначим через $\text{cov } M$ минимальное число независимых множеств матроида M , объединение которых есть E .

Следствие $\text{cov } M = \max \left\{ \left\lceil \frac{|A|}{r(M \cdot A)} \right\rceil : A \subseteq E \right\}$.

Задача о покрытии E минимальным числом независимых множеств матроида M очевидным образом сводится к последовательным задачам о покрытии E заданным (все возрастающим) числом независимых множеств из M .

4.3. Пусть M_1 и M_2 — матроиды на E . Легко видеть, что M_1 и M_2 имеют общее независимое множество мощности r , если и только если $r(M_1 + M_2^*) \geq r(M_2^*) + r$, а задача отыскания множества мощности r , независимого как в M_1 , так и в M_2 , или выяснения, что такого множества нет (ее называют задачей о пересечении матроидов M_1 и M_2), сводится к задаче о построении базы суммарного матроида $M_1 + M_2^*$. Задача об отыскании максимального множества в E , независимого как в M_1 , так и в M_2 , сводится, очевидно, к задаче о пересечении матроидов.

4.3.1. Из теоремы Нэш-Вильямса (3.7.2) вытекает

Теорема [1]. Пусть M_1, M_2 — матроиды на E . Тогда M_1 и M_2 имеют общее независимое множество мощности r , если и только если $r \leq r(M_1 \cdot A) + r(M_2^* \cdot \bar{A})$ для любого $A \subseteq E$.

Доказательство.

Допустим, $r(M_1 + M_2^*) \geq r(M_2^*) + r$. Тогда по теореме Нэш-Вильямса $r(M_2^*) + r \leq r(M_1 + M_2^*) = \min \{r(M_1 \cdot A) + r(M_2^* \cdot A) + |\bar{A}| : A \subseteq E\}$, значит, $r \leq r(M_1 \cdot A) + r(M_2^* \cdot \bar{A})$, так как $\bar{A} - (r(M_2^*) - r(M_2^* \cdot A)) = r(M_2^* \cdot \bar{A})$.

Допустим, $r \leq r(M_1 \cdot A) + r(M_2^* \cdot \bar{A})$ для любого $A \subseteq E$. Тогда $r(M_2^*) + r \leq \min \{r(M_1 \cdot A) + r(M_2^* \cdot A) + |\bar{A}| : A \subseteq E\}$. По теореме Нэш-Вильямса правая часть неравенства равна $r(M_1 + M_2^*)$. Таким образом, $r(M_2^*) + r \leq r(M_1 + M_2^*)$, значит, в E существует множество мощности r . \square

5. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМЫ МАТРОИДОВ

Пусть M_i — матроид на E и ρ_i — ранговая функция M_i , $i = 1, \dots, k$, ρ — ранговая функция матроида — суммы $\bigvee_1^k M_i$ и $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$. Множество A , на котором в формуле 3.8 для ранга суммы матроидов $\bigvee_1^k M_i$ достигается минимум правой части назовем *экстремальным множеством системы матроидов* M_1, \dots

..., M_k . Обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{M})$ класс всех экстремальных множеств системы матроидов \mathcal{M} . Экстремальные множества естественно интерпретировать как «препятствия» на пути построения возможно большего независимого множества (базы) суммы матроидов из \mathcal{M} . Далее убедимся, что $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ есть решетка подмножеств из E . Более того, в некоторых терминах опишем все экстремальные множества для \mathcal{M} .

5.1. Как отмечалось в 3.8, из 3.4 и 3.7.2 получаем

Утверждение. $D\left(\bigvee_1^k M_i\right)$ — экстремальное множество системы матроидов M .

5.2. Утверждение. $X \subseteq E$ есть экстремальное множество системы матроидов M_1, \dots, M_k , если и только если

$$\rho(X) = \sum_1^k \rho_i(X);$$

$$X \supseteq D\left(\bigvee_1^k M_i\right).$$

Доказательство. Очевидно, $r\left(\bigvee_1^k M_i\right) = r\left(\left(\bigvee_1^k M_i\right) \cdot X\right) + r\left(\left(\bigvee_1^k M_i\right) \times \bar{X}\right)$. Вместе с тем $r\left(\left(\bigvee_1^k M_i\right) \cdot X\right) = \rho(X) \leq \sum_1^k \rho_i(X)$ и $r\left(\left(\bigvee_1^k M_i\right) \times \bar{X}\right) \leq |\bar{X}|$. Поэтому согласно 3.8 X

— экстремальное множество, если и только если $\rho(X) = \sum_1^k \rho_i(X)$

и $r\left(\left(\bigvee_1^k M_i\right) \times \bar{X}\right) = |\bar{X}|$. Последнее означает, что \bar{X} состоит из

одних перешейков матроида $\bigvee_1^k M_i$, т. е. $X \supseteq D\left(\bigvee_1^k M_i\right)$. \square

5.3. Из 3.8 и 5.2 получаем

Следствие. $D\left(\bigvee_1^k M_i\right)$ — наименьшее экстремальное множество системы матроидов M_1, \dots, M_k .

5.4. Нам понадобится следующее простое

Утверждение. Для $X \subseteq E$ $\rho(X) = \sum_1^k \rho_i(X)$, если и только если база матроида $\left(\bigvee_1^k M_i \cdot X\right)$ есть объединение непересекающихся матроидов $M_i \cdot X$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Пусть B_i — база $M_i \cdot X$, $i = 1, \dots, k$, и $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Тогда $\sum_1^k B_i$ есть база матроида $\left(\bigvee_1^k M_i\right) \cdot X$

и $\rho(X) = \left| \sum_1^k B_i \right| = \sum_1^k |B_i| = \sum_1^k \rho_i(X)$. Обратно: пусть $\rho(X) = \sum_1^k \rho_i(X)$ и пусть B есть база $\left(\bigvee_1^k M_i \right) \cdot X$. Тогда существует \mathcal{M} -разбиение (X_1, \dots, X_k) базы B такое, что $\sum_{i=1}^k \rho_i(X) = \rho(X) = |B| = \sum_1^k |X_i|$. Так как $X_i \in M_i$, то $|X_i| \leq \rho_i(X)$ для $i = 1, \dots, k$. Поэтому $|X_i| = \rho_i(X)$, значит, X_i — база матроида $M_i \cdot X$. \square

5.5. Из 5.2 и 5.4 получаем

Утверждение. $X \in E$ есть экстремальное множество системы матроидов M_1, \dots, M_k , если и только если

база матроида $\left(\bigvee_1^k M_i \right) \cdot X$ есть объединение непересекающихся баз матроидов $M_1 \cdot X, \dots, M_k \cdot X$;

$$X \in D \left(\bigvee_1^k M_i \right).$$

5.6. Пусть $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ — класс подмножеств $Z \in E$ таких, что $\rho(Z) = \sum_1^k \rho_i(Z)$ (тогда $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$).

Лемма. Если $X^1, X^2 \in \mathcal{Z}$, то $X^1 \cup X^2 \in \mathcal{Z}$.

Доказательство. Можно считать, что $X^1 \cup X^2 = E$, так как иначе могли бы рассматривать матроиды $M_i \cdot (X^1 \cup X^2)$ вместо матроидов M_i на E , $i = 1, \dots, k$. Так как $X^s \in \mathcal{Z}$, то согласно 5.4 существует упаковка (B_1^s, \dots, B_k^s) баз матроидов $M_1 \cdot X^s, \dots, M_k \cdot X^s$, $s = 1, 2$. Очевидно, $B_i^1 \setminus X^2$ содержит базу R_i^1 матроида $M_i \times (X^1 \setminus X^2)$. Тогда $B_i = R_i^1 + B_i^2$ есть база $M_i \cdot (X^1 \cup X^2)$, значит, (B_1, \dots, B_k) — упаковка баз матроидов M_1, \dots, M_k . Согласно 5.4 $X^1 \cup X^2 \in \mathcal{Z}$. \square

5.7. Из леммы 5.6 следует, что в классе $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ существует наибольшее (по включению) множество, которое обозначим через $H(\mathcal{M})$. Из 5.1 $D \left(\bigvee_1^k M_i \right) \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Поэтому из 5.2 вытекает

Теорема $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ есть решетка подмножеств из E (по включению), причем $H(\mathcal{M})$ есть наибольшее множество, а $D \left(\bigvee_1^k M_i \right)$ — наименьшее множество решетки множеств $\mathcal{E}(\mathcal{M})$.

5.8. Лемма. Пусть $\lambda = (B_1, \dots, B_k)$ есть \mathcal{M} -разбиение базы B матроида $\bigvee_1^k M_i$ и X — некоторое экстремальное множество системы M_1, \dots, M_k . Тогда $B_i \cap X$ есть база $M_i \cdot X$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Положим $X_i = B_i \cap X$. По 5.2 $X \in D \left(\bigvee_1^k M_i \right)$. Поэтому $X \cap B = \sum_1^k X_i$ есть база $\left(\bigvee_1^k M_i \right) \cdot X$,

так что $\rho(X) = |X \cap B| = \sum_1^k |X_i|$. По 5.2 $\rho(X) = \sum_1^k \rho_i(X)$.

Так как для любого $i = 1, \dots, k$ $X_i \in M_i$, значит, $|X_i| \leq \rho_i(X)$, для любого $i = 1, \dots, k$ $X_i \in M_i$ есть база $M_i \cdot X$. \square

5.9. Пусть $\lambda = (B_1, \dots, B_k)$ есть \mathcal{M} -разбиение базы B матроида $\bigvee_1^k M_i$, а $K(\lambda)$ обозначает множество всех не λ -активных элементов (вершин в Γ_λ).

Теорема. $H(\mathcal{M}) = K(\lambda)$ (так что $K(\lambda)$ не зависит ни от λ , ни от B).

Доказательство. Пусть $H(\mathcal{M}) = H$. По 5.8 $H \cap B_i$ есть база $M_i \cdot H$, поэтому каждый из H не λ -активен, значит, $H \subseteq K(\lambda)$.

Остается доказать, что $K(\lambda) \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$. Так как $D\left(\bigvee_1^k M_i\right) \subseteq H(\mathcal{M}) \subseteq K(\lambda)$, то согласно 5.5 достаточно доказать, что $K_i(\lambda) = B_i \cap K(\lambda)$ есть база матроида $M'_i = M_i \cdot K(\lambda)$. Рассмотрим $x \in K(\lambda) \setminus K_i(\lambda)$ и докажем, что $K_i(\lambda) + x \notin M_i$. Так как x — не λ -активен, существует цикл $C(M_i, B_i + x)$. Если этот цикл содержит элемент y из $B_i \setminus K_i(\lambda)$, то y есть λ -активный элемент, а значит, x — тоже λ -активный элемент — противоречие. Таким образом, $C(M_i, B_i + x) \subseteq K_i(\lambda) + x$, т. е. $K_i(\lambda) + x \notin M_i$. \square

5.10. Пусть, как и раньше, $\lambda = (B_1, \dots, B_k)$ есть \mathcal{M} -разбиение базы B матроида $\bigvee_1^k M_i$. В 5.7 мы убедились, что $D\left(\bigvee_1^k M_i\right)$ есть наименьшее экстремальное множество системы матроидов \mathcal{M} .

В терминах орграфа $\Gamma_\lambda D\left(\bigvee_1^k M_i\right)$ есть множество $\Gamma_\lambda(\bar{B})$ всех элементов-вершин, достижимых в Γ_λ из \bar{B} (см. (3.7.2)). Оказывается, в таких же терминах можно описать любое экстремальное множество системы \mathcal{M} . Положим $D\left(\bigvee_1^k M_i\right) = D$ и $H(\mathcal{M}) = H$.

Теорема. $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \{\Gamma_\lambda(A) : \bar{B} \subseteq A \subseteq H\}$, где B — произвольная база матроида $\bigvee_1^k M_i$.

Доказательство. По 5.9 H есть множество всех не λ -активных элементов. Поэтому для $A \subseteq H$ $\rho(\Gamma_\lambda(A)) = \sum_1^k \rho_i(\Gamma_\lambda(A))$. Если $A' \subseteq A$, то $\Gamma_\lambda(A') \subseteq \Gamma_\lambda(A)$. По (3.7.2) $D = \Gamma_\lambda(\bar{B})$. Поэтому если $\bar{B} \subseteq A \subseteq H$, то из 5.2 $\Gamma_\lambda(A) \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$.

И наоборот: пусть $X \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$. Тогда по 5.2 $\rho(X) = \sum_1^k \rho_i(X)$ и $D \subseteq X$. По 5.5 $X_i = B_i \cap X$ есть база матроида $M_i \cdot X$. Поэтому $X = \Gamma_\lambda(\bar{B} + (X \setminus D))$. \square

Замечание. Из этой теоремы также непосредственно следует утверждение 5.7.

5.11. Нам понадобится также некоторое обозначение для графа Γ_λ , явно указывающее на зависимость Γ_λ от системы \mathcal{M} . Пусть $\Gamma_\lambda = \Gamma(\mathcal{M}, \lambda)$. Для $X \subseteq E$ положим

$$dX = dX(\mathcal{M}) = X \setminus D \left(\bigvee_1^k M_i \right), \quad \Gamma^X(\mathcal{M}, \lambda) = \Gamma(\mathcal{M}, \lambda) - (E \setminus dX)$$

и, как и раньше, $\mathcal{M} \cdot X = (M_1 \cdot X, \dots, M_k \cdot X)$.

Из 5.10 непосредственно следует

Теорема:

(y1) $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \mathcal{E}(\mathcal{M} \cdot H)$;

(y2) для любого $A \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$ решетка $\mathcal{E}(\mathcal{M} \cdot A)$ экстремальных множеств системы матроидов $\mathcal{M} \cdot A$ изоморфна решетке $\mathcal{Z}(\Gamma^A(\mathcal{M}, \lambda))$ ориентированных разрезов графа $\Gamma^A(\mathcal{M}, \lambda)$ (очевидно, $\mathcal{E}(\mathcal{M} \cdot A) = \mathcal{E}(\mathcal{M})|_A$);

(y3) пусть $\{T_i: i=1, \dots, n\}$ — совокупность всех бикомпонент графа $\Gamma^A(\mathcal{M}, \lambda)$. Тогда $\{\Gamma_\lambda(\bar{B} + T_i): i=1, \dots, n\}$ есть совокупность всех join-неразложимых элементов решетки $\mathcal{E}(\mathcal{M} \cdot A)$, а разбиение $\{D, T_1, \dots, T_n\}$ есть главное разбиение множества H для решетки $\mathcal{E}(\mathcal{M} \cdot A)$.

Далее увидим, что для $A \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$ граф $\Gamma^A(\mathcal{M}, \lambda)$ есть граф $\Gamma(\mathcal{M}^A, \lambda^A)$ для некоторой другой системы матроидов \mathcal{M}^A и некоторого \mathcal{M}^A -разбиения λ^A некоторой базы суммы матроидов из \mathcal{M}^A .

5.12. Как и раньше, $H(\mathcal{M}) = H$, $D \left(\bigvee_1^k M_i \right) = D$, $I \left(\bigvee_1^k M_i \right) = I$.

Для $X \subseteq E$ положим $M_i * X = (M_i \cdot X) \times dX$ (так что матроид $M_i * X$ определен на множестве dX), $\mathcal{M} * X = (M_1 * X, \dots, M_k * X)$ и $\lambda * X = (B_1 \cap dX, \dots, B_k \cap dX)$.

Теорема. Пусть A — экстремальное множество системы $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k): A \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$ и $\lambda = (B_1, \dots, B_k)$ есть \mathcal{M} -разбиение базы B матроида $M(\mathcal{M}) = \bigvee_1^k M_i$. Тогда

(y1) $B_i \cap A$ есть база матроида $M_i * A$, так что $dA = \sum_1^k B_i \cap A$

есть база матроида $M(\mathcal{M} * A) = \bigvee_1^k (M_i * A)$ (т. е. $D \left(\bigvee_1^k M(\mathcal{M} * A) \right) = \emptyset$, значит, $M(\mathcal{M} * A)$ — свободный матроид), $\lambda * A$ есть $\mathcal{M} * A$ — разбиение базы dA ;

(y2) $\Gamma^A(\mathcal{M}, \lambda) = \Gamma(\mathcal{M} * A, \lambda * A)$.

Доказательство:

(д0) Очевидно, $V\Gamma^A(\mathcal{M}, \lambda) = V\Gamma(\mathcal{M} * A, \lambda * A) = dA$. Положим $M_j * A = M'_j$ и $B_j \cap dA = B'_j$. Достаточно доказать, что для любых $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$ и любых $x \in B'_i$ и $y \in B'_j$ $y \in C(M_j, B_j + x) \Leftrightarrow y \in C(M'_j, B'_j + x)$.

(д1). Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение. Пусть \mathcal{C}_v — множество циклов T матроида M_j таких, что

$y \in T$ и $T \cap I \subseteq B_j$ (так что $\emptyset \neq T \setminus B_j \subseteq D$). Тогда $\mathcal{C}_y = \emptyset$. Допустим противное, т. е. $\mathcal{C}_y \neq \emptyset$. Тогда выберем в \mathcal{C}_y цикл K с минимальной мощностью множества $\delta K = K \setminus B_j$. Пусть $z \in \delta K$. По 5.8 (или по 3.3) $B_j^d = B_j \cap D$ есть база $M_j \cdot D$, значит, существует цикл $C_z = C(M_j, B_j^d + z)$, так что $z \in C_z \subseteq D$, следовательно, $y \notin C_z$. По усиленной аксиоме циклов $(\mathcal{C}2)'$ существует цикл K' матроида M_j такой, что $y \in K' \subseteq K \cup C_z \setminus z$. Тогда $K' \cap I \subseteq B_j$, и значит, $K' \in \mathcal{C}_y$. Но $|\delta K'| \leq |\delta K \setminus z| < |\delta K|$. Это противоречит выбору цикла K в \mathcal{C}_y .

(д2) Предположим, $y \in C(M_j, B_j + x) = C$. Так как $A \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$, то из 5.8 следует, что $C \subseteq A$, значит, C есть цикл матроида $M_j \cdot A$. По свойству операции сжатия существует цикл C'_y матроида M'_j , который содержит y и лежит в $\hat{C} = C \cap dA$, а для этого цикла C , существует цикл C_y матроида $M_j \cdot A$ такой, что $C_y \cap dA = C'_y$. Тогда $y \in C_y$. Предположим, $x \notin C'_y$. Тогда $C_y \cap I \subseteq B_j$, значит, $C_y \in \mathcal{C}_y$. Это противоречит (д1). Таким образом, $x, y \in C'_y$. Так как $C'_y \subseteq \hat{C}$, то $C_y = C(M'_j, B_j + x)$.

(д3) Предположим теперь наоборот, что $y \in C(M'_j, B'_j + x) = C_{xy}$. Рассмотрим также цикл $C = C(M_j, B_j + x)$. Пусть $y \notin C$. Как отмечалось в (д1), $C \subseteq A$. По свойству сжатия существует цикл C_{xy} матроида M такой, что $C'_{xy} = C_{xy} \cap dA$. По усиленной аксиоме циклов $(\mathcal{C}2)'$ (примененной к циклам C и C_{xy}) существует цикл C_y такой, что $y \in C_y \subseteq C \cup C_{xy} \setminus x$. Тогда $C_y \cap I \subseteq B_j$, значит, $C_y \in \mathcal{C}_y$. Это противоречит (д1). Таким образом, справедливо

5.13. Утверждение. Если матроид $\bigvee_k (M_i \times A)$ $A \in E$ свободный (т. е. $D\left(\bigvee_k (M_i \times A)\right) = \emptyset$), то $A \subseteq I\left(\bigvee_k M_i\right)$.

Доказательство (индукцией по k). Для $k=1$ утверждение непосредственно следует из свойств операции сжатия. Пусть утверждение верно для $k=p \geq 1$; докажем его для $k=p+1$.

Положим $\bigvee_1^p M_i = M^1$ и $M_{p+1} = M^2$. Предположим, что существует элемент $x \in A \cap D(M^1 \vee M^2)$. По свойству операции сжатия существует цикл C матроида $(M^1 \vee M^2) \times A$ и цикл C^* матроида $M^1 \vee M^2$ такие, что $x \in C^* = C^* \cap A$. Согласно конструкции цикла суммы матроидов (см. 3.5) $C^* \setminus x = X^1 + X^2$, где X^i — база матроида $M^i \cdot C^*$, $i=1, 2$. Положим $X_1^i = X^i \cap A$. Возможны случаи:

- (с1) $X^1 = X^2 = \emptyset$;
- (с2) одно из множеств X^1, X^2 , скажем X^1 , пусто, а другое, т. е. X^2 не пусто;
- (с3) оба множества X^1 и X^2 не пусты.

В случае (с1) x есть петля матроида $\bigvee_{i=1}^2 (M^i \times A) = \bigvee_{i=1}^{p+1} (M_i \times A)$,

что противоречит условию утверждения. В случае (с2) x есть

петля матроида $M^1 \times A$ и каждый элемент y из X_1^2 — тоже петля матроида $M^1 \times A$, так как $C(M^1, X^1 + y) \subseteq X^1 + y \subseteq \bar{A} + y$. Таким образом, множество $X_1^2 + x$ состоит из одних петель матроида $M^1 \times A$. Так как $M^1 \times A + M^2 \times A$ — по условию свободный матроид, то A — его база, значит, $A = A^1 + A^2$, $A^i \in M^i \times A$, $i = 1, 2$. Так как $X_1^2 + x$ состоит из петель матроида $M^1 \times A$, то $X_1^2 + x \subseteq M^2 \times A$. Согласно конструкции цикла суммы матроидов в 3.5 существует элемент $z \in X^1 + x$ такой, что $C(M^2, X^2 + z) \cap X_1^2 \neq \emptyset$ и по свойству операции сжатия должен существовать цикл матроида $M^2 \times A$, лежащий в $X_1^2 + x$, значит, $X_1^2 + x \not\subseteq M^2 \times A$ — противоречие.

Таким образом, остается исследовать случай (с3). Пусть $X_2^i \subseteq X_1^i$ — база минора $(M^i \times A) \cdot X_2^i$, $i = 1, 2$. Тогда $X_2 = \sum_{i=1}^2 X_2^i \subseteq \sum_{i=1}^2 (M^i \times A)$. Докажем, что X_2^i — база минора $(M^i \times A) \cdot C$, $i = 1, 2$, т. е. что для каждого элемента $y \in C \setminus X_2^i$ существует цикл $C(M^i \times A, X_2^i + y)$. Так как X^i — база матроида $M^i \cdot C^*$, то $X^i + y$ содержит цикл $C(M^i, X^i + y)$. Возможны два случая:

$$(с3.1) \quad C(M^i, X^i + y) \cap X_1^i = \emptyset,$$

$$(с3.2) \quad C(M^i, X^i + y) \cap X_1^i \neq \emptyset.$$

В случае (с3.1) y есть петля в $M^i \times A$, значит, она есть искомым цикл $C(M^i \times A, X_2^i + y)$. В случае (с3.2) по свойствам операции сжатия найдется цикл C' матроида $M^i \times A$ такой, что $y \in C'$, $C' \setminus y \subseteq X_2^i$. Покажем, что существует цикл $C(M^i \times A, X_2^i + y)$. Предположим, что цикл C' выбран так, что мощность множества $C' \setminus X_2^i$ минимальна. Если существует элемент $z \in C' \setminus X_2^i$, $z \neq y$, то $z \in X_1^i$ и существует цикл $C(M^i \times A, X_2^i + z)$. Тогда по усиленной аксиоме циклов $(\mathcal{C}2)'$ существует цикл C'' матроида $M^i \times A$ такой, что $y \in C'' \subseteq C' \cup C(M^i \times A, X_2^i + z) \setminus z$. Цикл C'' обладает теми же свойствами, что и C' , но $|C'' \setminus X_2^i| < |C' \setminus X_2^i|$ — это противоречит выбору цикла C' . Следовательно, $C' \setminus X_2^i = \{y\}$, т. е. $C' = C(M^i \times A, X_2^i + y)$. Таким образом, в случае (с3) множество $X_2 = \sum_{i=1}^2 X_2^i$ есть база матроида $\bigvee_{i=1}^2 (M_i \times A) \cdot C$, поэтому существует цикл $C(M^1 \times A + M^2 \times A, X_2 + x)$, что противоречит условию утверждения. \square

5.14. Теорема. Подмножество $X \subseteq E$ есть экстремальное множество матроида $\bigvee_{i=1}^k M_i$ тогда и только тогда, когда $\rho(X) = \sum_{i=1}^k \rho_i(X)$ и матроид $\bigvee_{i=1}^k (M_i \times \bar{X})$ свободный.

Доказательство. Необходимость следует из утверждений 5.2 и 7.3, достаточность — из утверждений 5.2 и 5.13.

5.15. Утверждение. Пусть $X \subseteq E$ таково, что $\rho(X) = \sum_{i=1}^k \rho_i(X)$. Тогда матрица $\bigvee_{i=1}^k (M_i \times \bar{X})$ свободный, если и только если $\bar{X} \subseteq I\left(\bigvee_{i=1}^k M_i\right)$.

6. БАЗОВЫЙ РЯД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МАТРОИДОВ И ЕГО СВОЙСТВА

6.1. Пусть M_1, \dots, M_k — последовательность матроидов на E . Обозначим через $\text{rask}(M_1, \dots, M_k)$ задачу отыскания максимальной по числу членов последовательности (B_1, \dots, B_p) множеств из E такой, что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и B_i есть база M_i , $i = 1, \dots, k$. Обозначим через $\text{cov}(M_1, \dots, M_k)$ задачу отыскания минимальной по числу членов последовательности (X_1, \dots, X_c) множеств из E такой, что X_i есть независимое множество M_i и $\bigcup_{i=1}^c X_i = E$ (если таковая существует). Очевидно, задачи $\text{rask}(M_1, \dots, M_k)$ и $\text{cov}(M_1, \dots, M_k)$ обобщают соответственно задачи $\text{rask}(M)$ и $\text{cov}(M)$ на случай последовательности матроидов. Как и в разд. 4, решение обеих задач сводится к построению баз матроидов $\bigvee_{i=1}^s M_i$, $s = 1, \dots, k$.

В этом разделе определим для последовательности (M_1, \dots, M_k) матроидов некоторую специальную последовательность (Y_1, \dots, Y_k) независимых множеств матроидов M_1, \dots, M_k , называемую *базовым рядом* последовательности (M_1, \dots, M_k) . Далее увидим, что базовый ряд обладает некоторыми интересными свойствами. В частности, он содержит решение как задачи $\text{rask}(M_1, \dots, M_k)$, так и задачи $\text{cov}(M_1, \dots, M_k)$. В случае, когда в последовательности (M_1, \dots, M_k) все матроиды одинаковы ($M_i = M$), а число их k достаточно велико, базовый ряд этой последовательности описывает определенные свойства матроида M и называется *базовым рядом матроида M* . Как отмечалось, прообразом понятия базового ряда служит понятие регулярной унаковки стягивающих лесов графа, введенное В. П. Полесским в 1974 г. [4].

6.2. Рассмотрим последовательность $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$ матроидов на E . Как и в 3.1, последовательность $\beta = (X_1, \dots, X_k)$ подмножеств из E назовем *\mathcal{M} -последовательностью*, если

(с1) $X_i \subseteq M_i$, $i = 1, \dots, k$;

(с2) $X_i \cap X_j = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$.

Если $X \subseteq \bigvee_{i=1}^k M_i$, то существует \mathcal{M} -последовательность $\beta = (X_1, \dots, X_k)$ такая, что $X = \sum_{i=1}^k X_i$. Эту \mathcal{M} -последовательность β

назовем \mathcal{M} -разбиением X , а \mathcal{M} -последовательность $\beta = (B_1, \dots, B_k)$ — базовым рядом последовательности матроидов $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$, если

$$(c3) \quad \sum_{i=1}^l B_i \text{ есть база матроида } \bigvee_{i=1}^l M_i \text{ для любого } l \in \{1, \dots, k\}.$$

6.3. Утверждение. Для каждой базы B матроида $\bigvee_1^k M_i$ существует ее \mathcal{M} -разбиение, являющееся базовым рядом последовательности $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$.

Доказательство. Пусть $M^l = (M_1, \dots, M_l)$ и $M^l = \bigvee_1^l M_i$, $l = 1, \dots, k$. Докажем, что для любой базы B^l матроида M^l существует ее \mathcal{M}^l -разбиение, являющееся базовым рядом \mathcal{M}^l . Для $i = 1$ утверждение очевидно. Так как $\bigvee_1^k M_i = \left(\bigvee_1^{k-1} M_i \right) \vee M_k$, то $B = X^{k-1} + X_k$, где $X^{k-1} \in \bigvee_1^{k-1} M_i$, $X_k \in M_k$. Пусть B^{k-1} — база матроида $\left(\bigvee_1^{k-1} M_i \right) \cdot B$, содержащая X^{k-1} . Тогда $B = B^{k-1} + B_k$, где $B_k = X_k \setminus B^{k-1}$. Докажем, что B^{k-1} — база матроида $\bigvee_1^{k-1} M_i$. Допустим противное, т. е. $B^{k-1} + x \in \bigvee_1^{k-1} M_i$ для некоторого $x \in E \setminus B^{k-1}$. Если $x \in B_k$, то B^{k-1} не есть база $\left(\bigvee_1^{k-1} M_i \right) \cdot B$ — противоречие. Если $x \in \bar{B}$, то $B + x \in \bigvee_1^k M_i$, значит, B не есть база $\bigvee_1^k M_i$ — противоречие. По предположению индукции существует \mathcal{M}^{k-1} -разбиение (B_1, \dots, B_{k-1}) базы B^{k-1} , являющееся базовым рядом \mathcal{M}^{k-1} . Тогда $(B_1, \dots, B_{k-1}, B_k)$ есть \mathcal{M} -разбиение базы B , являющееся базовым рядом \mathcal{M} .

6.4. Из рассуждений в 6.3 непосредственно следует

Утверждение. Пусть $\beta = (B_1, \dots, B_k)$ — базовый ряд последовательности $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$. Тогда $(|B_1|, \dots, |B_k|)$ лексико-графический максимум $\{(|X_1|, \dots, |X_k|) : (X_1, \dots, X_k) — \mathcal{M}\text{-последовательность}\}$. В частности:

$$B_{l+1} \text{ есть база матроида } M_{l+1} \bigvee_1^l B_i, \quad l = 0, \dots, k-1;$$

если $\beta' = (B'_1, \dots, B'_k)$ — базовый ряд \mathcal{M} , то $|B_i| = |B'_i|$, $i = 1, \dots, k$.

6.5. Базовый ряд $\beta = (B_1, \dots, B_k)$ матроидов $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$ разбивается на блоки следующим образом: $\mathcal{B}_1 = (B_1, \dots, B_{s_1}), \dots, \mathcal{B}_{j+1} = (B_{s_{j+1}}, \dots, B_{s_{j+1}}), \dots$ так, что $B_i \in \mathcal{B}_j \Leftrightarrow B_i$ есть база в M_i и вообще $B_i \in \mathcal{B}_{j+1} \Leftrightarrow B_i$ есть база $M_i \setminus \Sigma\{B_s : s \leq s_j\}$. Обозначим через $b = b(\beta, \mathcal{M})$ число блоков базового ряда β . Ко-

нечно, \mathcal{B}_j и s_j зависят от β и M : $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}_j(\beta, M)$ и $s_j = s_j(\beta, M)$. Число элементов $l_j(\beta, M) = |\mathcal{B}_j(\beta, M)| = s_j(\beta, M) - s_{j-1}(\beta, M)$ блока \mathcal{B}_j будем называть его *длиной*. Очевидно, $\sum \{l_j : j = 1, \dots, b\} = k$. Из 6.4 следует: если β и β' — базовые ряды для M , то $l_1(\beta, M) = l_1(\beta', M) = l_1(M)$. Возможно, для $j \geq 2$ $l_j(\beta, M) \neq l_j(\beta', M)$, т. е. $l_j(\beta, M)$, вообще говоря, зависит от β .

6.6. Рассмотрим последовательность $\mathcal{M}^k = (M_1, \dots, M_k)$ из k одинаковых матроидов M , и пусть $\beta^k = (B_1, \dots, B_k)$ есть базовый ряд \mathcal{M}^k . Тогда, очевидно, $B_i = \emptyset$ при $i = c = \text{cov } M$. Базовый ряд последовательности \mathcal{M}^c из $c = \text{cov } M$ одинаковых матроидов M будем называть *базовым рядом матроида M* . Легко видеть, что каждый блок $\mathcal{B}_i(\beta, M)$ базового ряда β матроида M состоит из множеств одинаковой мощности: $B_p, B_q \in \mathcal{B}_i \Rightarrow |B_p| = |B_q| = r_i(\beta, M)$; число $r_i(\beta, M)$ назовем *рангом блока $\mathcal{B}_i(\beta, M)$* ;

число блоков, длина и ранг каждого блока базового ряда β матроида M не зависят от β , а зависят только от M :

$$b(\beta, M) = b(M), l_i(\beta, M) = l_i(M); r_i(\beta, M) = r_i(M).$$

Очевидно,

$$r_{i+1} < r_{i2} \quad \sum_1^b l_i = \text{cov } M; \quad \sum_1^b l_i r_i = |E|.$$

Таким образом, базовый ряд матроида M есть разбиение E на минимальное число независимых множеств матроида M , причем это разбиение состоит из серии максимальных упаковок баз «сужающихся» матроидов.

7. БАЗОВЫЙ РЯД И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МАТРОИДОВ

7.1. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}^k = (M_1, \dots, M_k)$, где M_i — матроид на E . Пусть $A \subseteq E$. Если $\lambda = (X_1, \dots, X_k)$, то положим $\lambda \cdot A = (X_1 \cap A, \dots, X_k \cap A)$. Последовательность множеств $\lambda \cdot A$ будем называть *следом последовательности множеств λ на A* . Положим $\mathcal{M} \cdot A = (M_1 \cdot A, \dots, M_k \cdot A)$ и $\mathcal{M} \times A = (M_1 \times A, \dots, M_k \times A)$. Если $\beta = (B_1, \dots, B_k)$ — базовый ряд последовательности матроидов \mathcal{M} , то след $\beta \cdot A$ базового ряда β на A не есть, вообще говоря, базовый ряд последовательности матроидов $\mathcal{M} \cdot A$. Однако если A — экстремальное множество системы \mathcal{M}^l , $l \leq k$, то дело обстоит иначе.

Теорема. Пусть β есть базовый ряд последовательности матроидов \mathcal{M}^k и A есть экстремальное множество последовательности матроидов \mathcal{M}^l , $l \leq k$. Тогда $\beta \cdot A$ есть базовый ряд последовательности матроидов $\mathcal{M} \cdot A$.

Доказательство. По определению базового ряда для каждого $j = 1, \dots, k$ множество $\sum_1^j B_i$ есть база матроида $\bigvee_1^j M_i = M^j$.

Согласно 5.2 при $j \geq l$ $\bar{A} \subseteq I(M') \subseteq I(M^j)$, поэтому $\left(\sum_1^j B_i\right) \cap A = \sum_1^j (B_i \cap A)$ есть база матроида $\left(\bigvee_1^j M_i\right) \cdot A = \bigvee_1^j (M_i \cdot A)$. Согласно 5.5 база $\sum_1^l (B_i \cap A)$ есть объединение непересекающихся баз $B_1 \cap A, \dots, B_l \cap A$ матроидов $M_1 \cdot A, \dots, M_l \cdot A$ соответственно. Поэтому и при $j < l$ множество $\sum_1^j (B_i \cap A)$ есть база матроида $\bigvee_1^j (M_i \cdot A)$. \square

Следствие. Пусть $M_i = M$ и A — экстремальное множество последовательности матроидов \mathcal{M}^k , $k = 1, \dots, \text{cov } M$. Тогда если β есть базовый ряд матроида M , то $\beta \cdot A$ есть базовый ряд матроида $M \cdot A$.

7.2. Утверждение. Пусть A — экстремальное множество для \mathcal{M}^l , а (B_1, \dots, B_k) есть базовый ряд для M^k ; $l \leq k$. Тогда $(B_i \cap \bar{A}) \in (M_i \times \bar{A})$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Так $\bar{A} \subseteq I(M') \subseteq \sum_1^l B_i$, то $B_i \cap \bar{A} = \emptyset$ при $i = l+1, \dots, k$. Предположим противное, т. е. для некоторого $i \leq l$ множество $B_i \cap \bar{A}$ содержит цикл C' матроида $M_i \times \bar{A}$. По определению сжатия существует цикл C матроида M_i такой, что $C' = C \cap \bar{A}$. Среди таких циклов выберем цикл C с минимальной мощностью множества $C \setminus B_i$. Так как $C \not\subseteq B_i$, то $C \setminus B_i \neq \emptyset$. Из 5.5 следует, что $B_i \cap A$ есть база матроида $M_i \cdot A$. Поэтому для каждого элемента $x \in C \setminus B_i$ существует цикл $C(M_i, B_i + x) \subseteq A$. Фиксируем $x \in C \setminus B_i$, $y \in C'$. По усиленной аксиоме циклов $(\mathcal{E}2)'$ существует цикл C'' матроида M такой, что $y \in C'' \subseteq C \cup C(M_i, B_i + x) \setminus x$. Так как $y \in C'' \cap \bar{A} \subseteq C'$, то $C'' \cap \bar{A} = C'$. Но $|C'' \setminus B_i| \leq |C \setminus B_i \setminus x| < |C \setminus B_i|$, что противоречит выбору цикла C . \square

7.3. Следствие. Пусть A — экстремальное множество для \mathcal{M}^k . Тогда матроид $\bigvee_1^k (M_i \times \bar{A})$ свободный.

Доказательство. Положим в утверждении 7.2 $l = k$. Тогда $\bar{A} = \sum_1^k (B_i \cap \bar{A})$, а $B_i \in \bar{A} \in M_i \times \bar{A}$. \square

7.4. Следствие. Пусть $M_i = M$. Тогда экстремальное множество системы матроидов \mathcal{M}^k замкнуто в матроиде M .

Доказательство. Пусть (B_1, \dots, B_c) , где $c = \text{cov } M$, есть базовый ряд матроида M . По 7.2 $B_i \cap \bar{A} \in M_i \times \bar{A}$, $i = 1, \dots, c$. Но $\sum_1^c B_i = E$, поэтому в $\bar{A} = \sum_1^c (B_i \cap \bar{A})$ нет петель матроида M , т. е. $\text{cl}(A) = A$. \square

Замечание. Если система матроидов \mathcal{M}^k состоит не из одинаковых матроидов, то экстремальное множество A системы \mathcal{M}^k может, вообще говоря, не быть замкнутым в каждом матроиде M_i .

7.5. Теорема. Пусть A — экстремальное множество системы \mathcal{M}^l , $l \leq k$, а (B_1^0, \dots, B_k^0) и (B_1^X, \dots, B_k^X) есть базовые ряды последовательностей матроидов $\mathcal{M} \cdot A = (M_1 \cdot A, \dots, M_k \cdot A)$ и $\mathcal{M} \times A = (M_1 \times \bar{A}, \dots, M_k \times \bar{A})$ соответственно. Тогда $(B_1^0 + B_1^X, \dots, B_k^0 + B_k^X)$ есть базовый ряд последовательности матроидов $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_k)$.

Доказательство. Так как B_1^0, B_1^X есть базы матроидов $M_1 \cdot A, M_1 \times \bar{A}$ соответственно, то $B_1^0 + B_1^X$ есть база матроида M_1 . Положим $B_i = B_i^0 + B_i^X$ и $B^j = \bigvee_1^j B_i$, $i, j = 1, \dots, k$. Предположим противное, т. е. (B_1, \dots, B_k) не есть базовый ряд для \mathcal{M}^k . Пусть тогда m есть наименьший номер j такой, что множество B^j не есть база матроида $M^j = \bigvee_1^j M_i$, так что $j > 1$. Докажем, что $m \leq l$. Предположим, что $m > l$. Тогда B^l — база матроида $M^l = \bigvee_1^l M_i$ и поэтому $B^l \cong I(M^l) \cong \bar{A}$. Но $I(M^m) \cong I(M^l)$, поэтому $\bar{A} \cong I(M^m)$. По условию $\sum_i^m B_i^0$ есть база матроида $\bigvee_1^m (M_i \cdot A) = \left(\bigvee_1^m M_i \right) \cdot A$. С другой стороны, так как все циклы матроида M^m лежат в A , то $\sum_i^m B_i^X = \bar{A}$ есть база свободного матроида $M^m \times \bar{A}$. Но тогда $\sum_i^m B_i^0 + \sum_i^m B_i^X = B^m$ — база матроида M^m — противоречие. Итак, $m \leq l$. Пусть $(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_m)$ — базовый ряд последовательности $\mathcal{M}^m = (M_1, \dots, M_m)$, так что $\sum_1^m \tilde{B}_i = \tilde{B}^m$ есть база M^m .

Положим $\hat{B}_i = \tilde{B}_i \cap \bar{A}$. По 7.2 $\hat{B}_i \in M_i \times \bar{A}$, поэтому $\sum_1^m \hat{B}_i \in \bigvee_1^m (M_i \times \bar{A})$. Так как по 7.1 $\tilde{B}^m \cap A = \sum_1^m (\tilde{B}_i \cap A)$ — база матроида $\bigvee_1^m (M_i \times A)$, а ввиду $\sum_1^m B_i^X \subseteq \bar{A}$ — по условию $B^m \cap A = \sum_1^m (B_i^0 \cap A)$ — база того же матроида, то $|B^m \cap A| = |\tilde{B}^m \cap A|$. Таким образом, $\left| \sum_1^m \hat{B}_i \right| = |\tilde{B}^m| - |\tilde{B}^m \cap A| > |B^m| - |B^m \cap A| = \sum_1^m B_i^X$ — противоречие. \square

7.6. Теорема. Пусть A — экстремальное множество системы \mathcal{M}^l , $l \leq k$ и (B_1, \dots, B_k) — базовый ряд последовательности $\mathcal{M}^k = (M_1, \dots, M_k)$. Тогда $(B_1 \cap \bar{A}, \dots, B_k \cap \bar{A})$ есть базовый ряд последовательности матриц $\mathcal{M}^k \times \bar{A} = (M_1 \times \bar{A}, \dots, M_k \times \bar{A})$.

Доказательство. Положим $B_i^X = B_i \cap A$ и $\bar{B}_i^0 = B_i \cap \bar{A}$. По 7.2 $B_i^X \subseteq M_i \times \bar{A}$. Пусть m — наименьший номер такой, что $\sum_1^m B_i^X$ не есть база матрицы $\bigvee_1^m (M_i \times \bar{A})$. Легко видеть, что $m < l$, так как при $m \geq l$ множество $\sum_1^m B_i^X = \bar{A}$ есть база свободного матрицы $\bigvee_1^m (M_i \times \bar{A})$. Пусть $(\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_m)$ есть базовый ряд последовательности $\mathcal{M}^m \times \bar{A}$. По 7.1 (B_1^0, \dots, B_m^0) есть базовый ряд для $\mathcal{M}^m \circ \bar{A}$. Положим $\tilde{B}_i = B_i^0 + \hat{B}_i, i = 1, \dots, m$. По 7.5 $(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_m)$ есть базовый ряд для \mathcal{M}^m . Поэтому $\left| \sum_1^m \tilde{B}_i \right| > \left| \sum_1^m B_i \right|$ — противоречие. \square

8. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ БАЗОВОГО РЯДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МАТРИЦ

8.1. Рассмотрим последовательность $\mathcal{M}^k = (M_1, \dots, M_k)$ матриц на E . Построим базовый ряд для \mathcal{M}^k следующим рекурсивным способом. Пусть уже построен базовый ряд $\beta^l = (X_1, \dots, X_l)$ для $\mathcal{M}^l = (M_1, \dots, M_l)$, $1 \leq l < k$, так что $X^l = \sum_1^l X_i$ есть база M^l . Опишем шаг процедуры, который дает базовый ряд для \mathcal{M}^{l+1} . Построим базу X_{l+1} матрицы $M_{l+1} \setminus X^l$. Положим $\lambda = (X_1, \dots, X_l, X_{l+1})$ и $X^{l+1} = \sum_1^{l+1} X_i$. Построим граф Γ_λ . Выясним, существует ли в Γ_λ активный путь из $\overline{X^{l+1}}$. Если такого пути нет, то по теореме 3.5 λ есть базовый ряд для \mathcal{M}^{l+1} . Если такой путь P найдется и он начинается с элемента $x \in \overline{X^{l+1}}$, то произведем перестройку \mathcal{M}^{l+1} -последовательности λ с помощью процедуры, описанной в 3.6. В результате перестройки получим новую \mathcal{M}^{l+1} -последовательность $\lambda' = (X'_1, \dots, X'_l, X'_{l+1})$ такую, что $x \in X'_{l+1}$, $|X'_i| = |X_i|$ для $i = 1, \dots, l$ и $|X'_{l+1}| = |X_l| + 1$. Повторяя процедуру, получим в конце концов базовый ряд последовательности \mathcal{M}^{l+1} . В результате k шагов этой процедуры получим базовый ряд для \mathcal{M}^k .

8.2. Возникает вопрос, какова трудоемкость этого алгоритма. Оракулом независимости матрицы M называется такой оракул,

который для каждого предъявленного ему подмножества $X \subseteq E$ определяет, является ли X независимым в M (т. е. $X \in M$). Если X есть независимое множество в M (т. е. $X \in M$), то оракул предъявляет некоторый цикл $C \subseteq X$. Будем считать, что каждый матроид M_i задан своим оракулом O_i , а действие алгоритма есть обращение к одному из оракулов O_i . Тогда число действий алгоритма есть общее число обращений алгоритма к оракулам O_1, \dots, O_k . Очевидно, описанный в 8.1 алгоритм построения базового ряда для \mathcal{M}^h тратит для добавления каждого нового элемента к уже построенной \mathcal{M} -последовательности не более $k \cdot |E|$ обращений к оракулам O_1, \dots, O_k (точнее, для построения графа Γ_λ). Поэтому указанный алгоритм обращается к оракулам O_1, \dots, O_k не более чем $k \cdot |E|^2$ раз. Описанный алгоритм строит базовый ряд данного матроида M (а значит, заодно решает задачи упаковки и покрытия для M) за $(\text{cov } M) \cdot |E|^2$ обращений к оракулу независимости $O(M)$, описывающему M . Так как $\text{cov } M$ не более (и может быть порядка) $|E|$, то указанный алгоритм требует, вообще говоря, $O(|E|^3)$ обращений к оракулу независимости (или, как будем говорить, проверок независимости). Все известные алгоритмы решения задач упаковки и покрытия требуют того же числа $O(|E|^3)$ проверок независимости [1]. Далее приведем модификацию указанного алгоритма, которая требует рекордно маленького числа $O(|E|^2)$ проверок независимости для построения базового ряда данного матроида (см. также [2]). Преобразование этого алгоритма служит алгоритм построения регулярной упаковки в графах [4].

8.3. Для уменьшения трудоемкости описанного выше алгоритма важна следующая лемма о «вилке».

Лемма. Пусть $M^h = \bigvee_1^h M_i, M_i = M$ и B^h — база в M^h , а именно:

$B^h = \sum_1^h B_i, B_i \in M, i = 1, \dots, k$, а X — база матроида $M \setminus B^k$ и $\lambda = (B_1, \dots, B_k, X)$. Тогда для любой дуги (y, z) в $\Gamma_\lambda; y, z \notin X$, существует «вилка» из двух дуг (y, x) и (x, z) с $x \in X$.

Доказательство. Пусть $z \in B_i$. Так как (y, z) — дуга в Γ_λ , то существует, и притом единственный, цикл $C_{yz} = C(M, B + y)$ такой, что $z \in C_{yz}$. Поскольку X — база в $M \setminus B^k$, то $X + y$ содержит, и притом единственный, цикл $C = C(M, X + y)$. Так как B^k — база M^k , для любого $a \in E \setminus B^k$ существует единственный цикл $C_a = C(M, B + a)$. Требуется доказать, что для некоторого $x \in C \cap X = C \setminus y$ в Γ_λ существует дуга (x, z) , т. е. существует цикл C_x такой, что $z \in C_x$. Допустим противное. Рассмотрим цикл $C_x, x \in C \setminus y$. По усиленной аксиоме циклов $(\mathcal{C}2)'$ в M существует цикл A такой, что $y \in A \subseteq C \cup C_x \setminus x$, поэтому $y \in A \subseteq C \cup B_i \setminus z$. Пусть $A = \{A : y \in A \subseteq C \cup B_i \setminus z\}$, и пусть $C^* \in \mathcal{A}$ и $|C^* \cap X| = \min \{|A \cap X| : A \in \mathcal{A}\}$. Если $C^* \cap X = \emptyset$, то $C^* \subseteq B_i + y$, значит, $C^* = C_{yz}$. Но $z \in C_{yz} \setminus C^*$ — противоречие. Таким образом, $\emptyset \neq C^* \cap X \ni a$. По усиленной аксиоме циклов $(\mathcal{C}2)'$ существу-

ет цикл C' такой, что $y \in C' \subseteq C^* \cup C_a \setminus a$, следовательно, $y \in C' \subseteq C \cup B_i$. Так как по предположению $C_a \not\subseteq z$, то $C' \not\subseteq z$, значит, $C' \in \mathcal{A}$. Но $C' \cap X \subseteq C^* \cap X \setminus a$, а отсюда $|C' \cap X| < |C^* \cap X|$. Это противоречит выбору C^* . \square

8.4. Опишем теперь модификацию алгоритма в 8.1, которая строит базовый ряд одного матроида M на E , но требует меньшего числа проверок независимости. Пусть, как и в 8.3, $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_c)$, $\mathcal{M}^k = (M_1, \dots, M_k)$, $k \leq c$, $M^k = \bigvee_1^k M_i$, но теперь $M_i = M$, $i = 1, \dots, c$ и $c = \text{cov } M$. Как и в 8.1, алгоритм построения базового ряда рекурсивный. Он состоит из c шагов T_1, \dots, T_c . На шаге T_k строится базовый ряд β^k для \mathcal{M}^k . В частности, на шаге T_1 строится база B матроида M и $\beta^1 = \{B\}$. Опишем шаг T_{k+1} , $k \geq 1$, который следует после выполнения шага T_k , так что к началу шага T_{k+1} имеем \mathcal{M}^k -ряд $\beta^k = (B_1, \dots, B_k)$. Шаг T_{k+1} состоит из последовательных итераций $T_{k+1, r}$. На итерации $T_{k+1, r}$ строится \mathcal{M}^{k+1} -последовательность $\lambda^r = (B_1^r, \dots, B_{k+1}^r)$ такая, что (B_1^r, \dots, B_k^r) есть \mathcal{M}^k -ряд. Итерация $T_{k+1, 0}$ тривиальна, ее результат — \mathcal{M}^{k+1} -последовательность $\lambda^0 = (B_1^0, \dots, B_{k+1}^0) = (B_1, \dots, B_k, \emptyset)$.

Опишем итерацию $T_{k+1, r+1}$, $r \geq 0$, которая следует после $T_{k+1, r}$, так что к началу итерации $T_{k+1, r+1}$ имеем \mathcal{M}^{k+1} -последовательность $\lambda^r = (B_1^r, \dots, B_{k+1}^r)$. Положим $B^r(k) = \sum_1^k B_i^r$. Вначале строим

базу X матроида $M \setminus B^r(k)$, содержащую B_{k+1}^r , а также список циклов $\mathcal{C}_{k+1, r+1} = \{C(M, X + z) : z \in E \setminus B^r(k) \setminus X\}$. Положим $\lambda = (B_1^r, \dots, B_k^r, X)$. Очевидно, $|X| \leq |B_k^r|$. Если $X = E \setminus B^r(k)$ или $|X| = |B_k^r|$, то $\beta^{k+1} = \lambda$. Предположим, $X \subset E \setminus B^r(k)$ и $|X| < |B_k^r|$. Положим $X_1 = X \cap (\cup \{C : C \in \mathcal{C}_{k+1, r+1}\})$, так что X_1 есть множество всех циклических элементов матроида $M \setminus B^r(k)$, лежащих в X . Рекуррентно определяем множества $Y_{i+1} = \Gamma_\lambda(X_i)$ и $X_{i+1} = (X_i \cup \Gamma_\lambda(Y_{i+1})) \cap X$. Обозначим через Γ^i и Γ_{i+1} множества дуг в Γ_λ , ведущих из X_i в Y_{i+1} и из Y_{i+1} в X_{i+1} соответственно. Пусть $l = l(k+1, r+1)$ — минимальное s такое, что

(с1) $X_{s+1} = X_s$, а значит, $Y_{s+1} = Y_s$;
либо (с2) в Y_{s+1} есть элемент y такой, что $X + y \in M$.
В случае (с1) $\beta^{k+1} = \lambda$, при этом $D(M^{k+1}) = E \setminus B^r(k) \setminus X + X_l + Y_{l+1}$. В случае (с2), пользуясь множествами Γ^i , Γ_{i+1} и $\mathcal{C}_{k+1, r+1}$ находим активный λ -путь, точнее, чередующийся λ -путь вида $P = (z, x_1, y_1, x_2, \dots, x_r, y_r = y)$, где $z \in E \setminus B^r(k) \setminus X$, $x \in X_i$, $y_i \in Y_{i+1}$, $i = 1, \dots, r$ и $X + y \in M$. С помощью этого активного λ -пути P производим перестройку \mathcal{M}^{k+1} -последовательности λ в новую \mathcal{M}^{k+1} -последовательность $\lambda^{r+1} = (B_1^{r+1}, \dots, B_k^{r+1}, B_{k+1}^{r+1})$ такую, что $(B_1^{r+1}, \dots, B_k^{r+1})$ есть новый \mathcal{M}^k -ряд, $z \in B_k^{r+1}$ и $|B_k^{r+1}| = |X| + 1$. Очевидно, β^{k+1} есть результат λ^p некоторой итерации $T_{k+1, p}$.

8.5. Оценим число обращений к оракулу независимости в описанном в 8.4 алгоритме построения базового ряда матроида M .

Пусть в результате работы алгоритма построен базовый ряд (K_1, \dots, K_c) матроида M , где $c = \text{сов } M$. Оценим число $p_{k+1, r+1}$ обращений на итерации $T_{k+1, r+1}$. Для построения базы X матроида $M \setminus B^r(k)$, содержащего B_{k+1}^r , а также для создания X_1 и списка циклов $\mathcal{C}_{k+1, r+1}$ требуется $p'_{k+1, r+1} = |E \setminus B_{k+1}^r| \leq |E|$ обращений к оракулу. Для построения X_l, Y_{l+1}, Γ^l и Γ_{l+1} , где $l = l(k+1, r+1)$, требуется $p''_{k+1, r+1} = k \cdot |X_1| + |Y_2| + \sum_{i=2}^l [k \cdot (|X_i| - |X_{i-1}|) + |Y_{i+1}| - |Y_i|] = k|X_l| + |Y_{l+1}| \leq k|X| + |B^r(k)|$ обращений. Так как $|X| \leq |K_{k+1}|$, то шаг T_{k+1} имеет не более $|K_{k+1}| + 1$ итераций. Поэтому для числа p_{k+1} обращений на шаге T_{k+1} имеем

$$p_{k+1} \leq (|K_{k+1}| + 1)(k \cdot |K_{k+1}| + 2|E|) = k|K_{k+1}|^2 + (2|E| + k)|K_{k+1}| + 2|E|.$$

Тогда для числа p обращений всего алгоритма к оракулу получим

$$p = \sum_{k=1}^c p_k \leq \sum_{k=1}^c (k-1)|K_k|^2 + 2|E| \sum_{k=1}^c |K_k| + \sum_{k=1}^c (k-1)|K_k| + 2c|E|.$$

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^c |K_k| = |E|, \quad |K_k| \geq |K_{k+1}| \text{ и } c \leq |E|.$$

Легко видеть: если $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ и $\sum_{k=1}^n x_k \leq a$, то

$$\sum_{k=1}^n kx_k^2 \leq a^2.$$

Поэтому

$$p \leq 3 \cdot |E|^2 + 3c|E| \leq 6|E|^2.$$

9. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ УПАКОВКИ, ПОКРЫТИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В МАТРОИДАХ

Как отмечалось в разд. 4, всякий алгоритм для задачи упаковки, покрытия или пересечения в матроидах строит фактически базу суммы некоторых матроидов. Вместе с тем любой алгоритм построения базы суммы матроидов, останавливаясь, «упирается» в некоторое «препятствие», являющееся экстремальным множеством системы матроидов-слагаемых. Как показано в 5, набор $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ экстремальных множеств для системы $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_h)$ матроидов образует решетку (по включению). Оказывается, любой из известных алгоритмов построения базы суммы

$\bigvee_1^h M_i$ наталкивается на препятствие, представляющее собой либо максимальное, либо минимальное экстремальное множество в решетке $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, так что все известные алгоритмы можно классифицировать по этому качественному признаку на две группы. В настоящем разделе проанализируем с этой точки зрения некоторые из известных алгоритмов. Матроидные алгоритмы в разд. 3 и 8, останавливаясь, упираются в минимальное множество в $\mathcal{E}(\mathcal{M})$.

9.1. Алгоритм Эдмондса разбиения множества E на минимальное число независимых множеств матроида [12]. Если M имеет петли, то задача, очевидно, не имеет решения. Поэтому будем считать, что M не имеет петель. Пусть $M_i = M$, $i = 1, 2, \dots$, — матроид на E , $\mathcal{M}^h = (M_1, \dots, M_h)$ и $M^h = \bigvee_1^h M_i$. Предположим, подмножество $X \subseteq E$ разбивается минимум на k независимых множеств матроида M и построено некоторое такое разбиение (X_1, \dots, X_k) (так что $\sum_1^k X_i = X$). Цель очередного шага алгоритма [12] состоит в выяснении, существует ли $x \in E \setminus X$ такой, что $X' = X + x \in M^h$. Если да, то множество X' тоже разбивается минимум на k независимых множеств из M и алгоритм строит некоторое такое разбиение (X'_1, \dots, X'_k) (так что $\sum_1^k X'_i = X'$).

В противном случае k заменяется на $k+1$, а именно: для $X' = X + x$, где $x \in E \setminus X$, $(X_1, \dots, X_k, X_{k+1} = \{x\}) = (X'_1, \dots, X'_k, X'_{k+1})$ есть минимальное \mathcal{M}^{h+1} -разбиение. Затем, если $X' \neq E$, то этот шаг повторяется исходя из получившегося минимального разбиения нового множества X' .

Опишем теперь шаг алгоритма, который исходит из минимального разбиения (X_1, \dots, X_k) множества $X = \sum_1^k X_i$. Строим

последовательность T_0, T_1, \dots, T_p замкнутых в M множеств, $T_0 = E$, $T_i = cl(T_{i-1} \cap X_{s_i})$, для некоторого s_i такого, что $|T_{i-1} \cap X_{s_i}| < \rho(T_{i-1})$. Последний номер p определяется первым моментом, когда либо (a1) $|T_p \cap X_i| = \rho(T_p)$ для любого $i \in \{0, \dots, p\}$, либо (a2) $E \setminus (T_p \cup X) \neq \emptyset$. Легко видеть, что $T_0 \supset T_1 \supset \dots \supset T_p$ и что такой момент p существует. В случае (a1) $|X| = k\rho(T_p) + |E \setminus T_p|$ и по теореме 5.9 X есть база матроида M^h , а T_p есть экстремальное множество системы матроидов \mathcal{M}^h . В случае (a2) $X + x \in M^h$ для любого $x \in E \setminus (T_p \cup X)$ и \mathcal{M}^h -разбиение множества $X + x = (X_1, \dots, X_k)$ строится некоторым образом с помощью последовательности T_0, T_1, \dots, T_p .

Утверждение. Если шаг алгоритма Эдмондса заканчивается случаем (a1), то T_p есть наибольшее множество $H(M^h)$ решетки экстремальных множеств системы \mathcal{M}^h .

Доказательство. Заметим вначале, что так как X есть база матроида M^k , а $H(M^k) \equiv D(M^k)$, то $X \cap H(M^k)$ есть база матроида $M^k \cdot H(M^k)$, поэтому согласно 5.8 $X'_i = X_i \cap H(M^k)$ есть база матроида $M_i \cdot H(M^k)$, $i = 1, \dots, k$. Покажем, что $H(M^k) \subseteq T_i$, $i = 0, \dots, p$ индукцией по i . Очевидно, $H(M^k) = E = T_0$. Предположим, $H(M^k) \subseteq T_i$, $0 \leq i < p$. Тогда $X'_i \subseteq X_i \cap T_i$ для любого $i = 1, \dots, k$. Кроме того, $H(M^k) = d(X'_i)$. Так как $cl(X'_i) \subseteq cl(X_{i+1} \cap T_i) = T_{i+1}$, то $H(M^k) \subseteq T_{i+1}$. \square

9.2. Алгоритм Лоулера — Ири — Томидзавы построения максимального общего независимого множества двух матроидов [13, 14]. Пусть M_1 и M_2 — матроиды на E . Задача состоит в отыскании максимального множества A^* , независимого как в M_1 , так и в M_2 , т. е. $A^* \in M_1 \cap M_2$ и $|A^*| = \max \{|A| : A \in M_1 \cap M_2\}$. В 4.3 показано, как она сводится к задаче построения базы суммы двух матроидов. Поэтому ее можно решить алгоритмами, описанными в разд. 8. В [13, 14] (см. также [7]) дан другой алгоритм для этой задачи. Он состоит в следующем. Если на k -м шаге уже построено общее независимое множество A_k , то на $(k+1)$ -м шаге на основе A_k либо строится общее независимое множество A_{k+1} большей, чем $|A_k|$, мощности, либо устанавливается, что $A_k = A^*$ — максимальное общее независимое множество матроидов M_1 и M_2 . Опишем $(k+1)$ -й шаг алгоритма. По множеству $A = A_k$ строится вспомогательный ориентированный граф G_A с множеством вершин E и с дугами двух типов для $x \in A$ и $y \in E \setminus A$:

- (a1) (y, x) есть дуга графа G_A , если $x \in C(M_1, A + y)$;
- (a2) (x, y) есть дуга в G_A , если $x \in C(M_2, A + y)$.

В орграфе G_A ищется путь из вершины множества $E \setminus cl_2 A$ (источники) в вершину множества $E \setminus cl_1 A$ (стоки). Здесь cl_i — оператор замыкания в матроиде M_i . Если такого пути не существует, то работа алгоритма заканчивается и можно доказать, что A_k есть максимальное общее независимое множество матроидов M_1 и M_2 . В противном случае находят кратчайший такой путь P . Затем из A удаляются те элементы, которые принадлежат P , и добавляются элементы из P , не принадлежащие A ; т. е. $A_{k+1} = A_k + P \setminus (A_k \cap P)$. Тогда, очевидно, $|A_{k+1}| = |A_k| + 1$.

Сравним данный алгоритм с алгоритмом в 3.6. Пусть B_2^* — база матроида M_2^* , а B есть база матроида $M_1 \setminus B_2^*$ и пусть $\lambda = (B_2^*, B)$. Орграфы G_B и G_λ имеют одно и то же множество вершин E . Все дуги типа (a1) из орграфа G_B присутствуют и в орграфе G_λ . Однако дуга типа (a2) из орграфа G_B находится в орграфе G_λ , если только $y \in B_2^*$, так как $E \setminus B_2^*$ есть база матроида M_2 . Других дуг в орграфе G_λ нет, поэтому G_λ есть просто подграф орграфа G_B .

В алгоритме, описанном в 3.6, в орграфе G_λ ищут активные пути из элементов множества $E \setminus B_2^* \setminus B$. Элемент $x \in E \setminus B_2^* \setminus B$ активен, если в орграфе G_λ есть путь с началом в x и концом в $y \notin cl_1 B$ (т. е. y есть сток в орграфе G_B). Очевидно, $x \in cl_2 B$,

так как $E \setminus B_2^*$ — база матроида M_2 и $E \setminus B_2 \ni (B + x)$. Таким образом, x — источник в орграфе G_B .

Из леммы 5.8 следует, что алгоритм Лоулера — Ири — Томидзавы строит множество $H(M_2^* \vee M_1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Welsh D. J. A. Matroid Theory.— N. Y.— L.: Acad. Press, 1976.
2. Кельманс А. К., Ломоносов М. В., Полесский В. П. О минимальных покрытиях в матроиде.— Проблемы передачи информации, 1976, т. 12, № 3, с. 94—107.
3. Полесский В. П. Об одном способе построения структурно-надежной сети связи.— В кн.: Дискретные автоматы и сети связи. М.: Наука, 1970, с. 13—19.
4. Полесский В. П. Об одной нижней границе надежности информационных сетей.— Проблемы передачи информации, 1971, т. 7, № 2, с. 88—96.
5. Полесский В. П. Покрытие конечного графа минимальным числом лесов.— Проблемы передачи информации, 1976, т. 12, № 2, с. 76—82.
6. Полесский В. П. Структура перешейков суммарного матроида.— Проблемы передачи информации, 1976, т. 12, № 4, с. 95—104.
7. Nakamura N., Iri M. A Structural Theory for Submodular Functions, Polymatroids and Polymatroid Intersections.— Research Memorandum RMI 81-66, August, 1981.
8. Iri M. A review of recent work in Japan on principal partitions of matroids and their applications.— In: Annals of the New York Academy of Sciences N. Y.: New York Academy of Sciences, 1979, v. 319, p. 306—319.
9. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.
10. Nash-Williams C. St. J. A. An application of matroids to graph theory.— In: Theorie des Graphes, Congress Internat. d'Etudes (Rome, 1966). Paris: Dunod, 1967, p. 263—265.
11. Lovasz L., Recski A. On the sum of matroids.— Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1973, N 24, p. 329—333.
12. Edmonds J. Minimum partition of a matroid into independent subset.— J. Res. Nat. Bur. Stand., 1965, 69B, p. 67—72.
13. Lawler E. L. Matroid intersection algorithms.— Math. Progr., 1975, v. 9, p. 31—56.
14. Iri M., Tomizawa N. An algorithm for finding an optimal independent assignment.— J. Operat. Research Soc. Japan, 1976, v. 19, p. 32—57.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
67	11 сверху	$V(\tilde{S}_n^m)$	$V(S_n^m)$
74	13 сверху	$= \mu_{ii}^i O_i +$	$= \mu_{ii}^i Q_i' +$
79	24 снизу	$PSU_2(16)$	$PSL_2(16)$

«Исследования по прикладной теории графов»

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

- А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, А. А. Шнейдер.
Приложения теории графов к задачам логического
проектирования дискретных устройств 3
- В. Н. Касьянов. Теоретико-графовые задачи анализа управ-
ляющих графов транслируемых программ 9
- В. К. Попков. Гиперсети и их характеристики связности . . . 25

Часть 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

- М. Х. Клинт, И. А. Фараджев. Метод V-колец в теории
групп подстановок и его комбинаторные применения 59
- В. А. Кохов. Диаграммы, числа стабильности и цикловые ин-
дексы групп автоморфизмов транзитивных графов 97

Часть 3

АЛГОРИТМЫ УПАКОВКИ И ПОКРЫТИЯ В КОМБИНАТОРНЫХ ОБЪЕКТАХ

- А. В. Карзанов. Алгоритм максимальной упаковки нечетно-
полюсных разрезов и его приложения 126
- А. К. Кельманс, В. П. Полесский. Экстремальные мно-
жества и задачи покрытия и упаковки в матроидах 140

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Утверждено к печати Вычислительным центром
СО АН СССР

Редактор издательства Л. П. Бондарева
Художественный редактор Т. Ф. Каминина
Художник С. М. Кудрявцев
Технический редактор А. В. Сурганова
Корректоры Н. Н. Крохотина, Г. А. Павлова

ИБ № 29852

Сдано в набор 18.10.85. Подписано к печати 17.04.86. МН-01448. Формат 60×90/16.
Бумага типографская № 2. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усп. печ. л. 10,5.
Усп. кр.-отт. 10,9. Уч.-изд. л. 12,5. Тираж 3550 экз. Заказ № 960. Цена 1 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука», Сибирское отделение.
630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука».
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

1 р. 30 к.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

